Aplicaciones de la integral definida

Áreas, volúmenes de sólidos de revolución (discos y arandelas) y longitud de curvas

Apunte de clase

Índice

1. Preliminares: la integral como límite de sumas **1**

2. Sumas de Riemann **2**

3. Aplicaciones **2**
3.1. Áreas 2
3.2. Longitud de una curva 4
3.3. Volúmenes de sólidos de revolución 6
3.4. Método de discos 6
3.5. Método de arandelas 6
3.6. Otros ejes de giro 7

4. Resumen y errores frecuentes **8**

5. Ejercicios propuestos **9**

1. Preliminares: la integral como límite de sumas

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada. Una *partición* de $[a,b]$ es un conjunto finito $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ con $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Escribimos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ y $\|P\| = \max_i \Delta t_i$ (la *norma* de P). Sean

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}, \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definición 1.1 (Sumas inferior y superior, integral)**.**

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta t_i, \qquad U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta t_i.$$

La función f es *integrable* en $[a,b]$ si $\sup_P L(f,P) = \inf_P U(f,P)$; ese número común es $\int_a^b f$.

Teorema 1.2 (Spivak, cap. 13)**.** *Si f es continua en $[a,b]$, entonces es integrable. Más aún, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$\|P\| < \delta \implies U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

(La segunda afirmación es consecuencia de la continuidad uniforme de f en $[a,b]$.)

Corolario 1.3. *Si f es continua, $\|P\| < \delta$ y $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ son puntos cualesquiera, entonces*

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta t_i - \int_a^b f\Big| < \varepsilon.$$

Demostración. Como $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$, la suma $\sum f(\xi_i)\Delta t_i$ está entre $L(f,P)$ y $U(f,P)$; la integral también. Ambas están en un intervalo de longitud menor que ε. □

Usaremos también el **Teorema Fundamental del Cálculo**: si f es continua en $[a,b]$ y $F' = f$, entonces $\int_a^b f = F(b) - F(a)$; y las propiedades habituales (linealidad, monotonía y aditividad $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$).

2. Sumas de Riemann

Sea f continua en $a \le x \le b$, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a,b]$. Si c_i es un punto entre t_{i-1} y t_i, formamos la suma

$$f(c_1)(t_1 - t_0) + f(c_2)(t_2 - t_1) + \cdots + f(c_n)(t_n - t_{n-1}).$$

Esta suma se denomina *suma de Riemann*.

Debido al modo arbitrario de elección de los c_i (además de la partición), no se puede establecer con seguridad si una determinada suma de Riemann es mayor o menor que $\int_a^b f$. Lo que sí es cierto es que, si las bases de los rectángulos son suficientemente estrechas, la suma debería aproximarse a la integral.

Teorema 2.1. *Si f es continua en $[a,b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, si $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ es una partición cualquiera de $[a,b]$ con todas las longitudes $t_i - t_{i-1} < \delta$, entonces*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,(t_i - t_{i-1}) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

para cualquier suma de Riemann formada tomando $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Esto vale también para funciones integrables.

3. Aplicaciones

Idea común a todas las aplicaciones

1. **Rebanar**: partir $[a,b]$ con una partición P.
2. **Acotar**: en cada subintervalo, la cantidad buscada (área, volumen, longitud) queda entre $m_i\Delta t_i$ y $M_i\Delta t_i$ para una cierta función continua h.
3. **Concluir**: la cantidad buscada está entre $L(h,P)$ y $U(h,P)$ para toda P; como $\int_a^b h$ es el único número con esa propiedad, la cantidad vale $\int_a^b h$.

3.1. Áreas

Definición 3.1 (Área bajo una gráfica)**.** Sea f continua y $f \ge 0$ en $[a,b]$, y $R(f;a,b) = \{(x,y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$. El *área* de R es $\int_a^b f$.

Justificación. La unión de los rectángulos $[t_{i-1}, t_i] \times [0, m_i]$ está contenida en R y R está contenida en la unión de los rectángulos $[t_{i-1}, t_i] \times [0, M_i]$. Si el área existe y es monótona y aditiva, entonces $L(f,P) \le \text{área}(R) \le U(f,P)$ para toda P, y el único número que cumple esto es $\int_a^b f$.

Proposición 3.2 (Región entre dos gráficas)**.** *Sean f, g continuas en $[a,b]$ con $f \le g$, y $R = \{(x,y) : a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x)\}$. Entonces*

$$\text{área}(R) = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Demostración. Como f es acotada, existe una constante c con $f + c \geq 0$. Trasladar R verticalmente c unidades no cambia su área, y la región trasladada es la que está bajo $g + c$ menos la que está bajo $f + c$. Luego área$(R) = \int_a^b (g + c) - \int_a^b (f + c) = \int_a^b (g - f)$. □

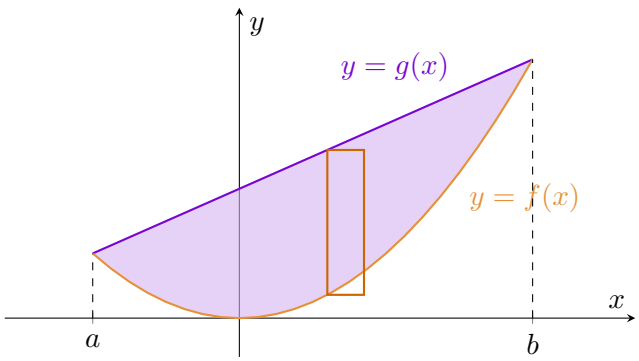

Figura 1: Región entre dos gráficas: cada rebanada tiene altura $g(t_i) - f(t_i)$ y ancho Δt_i.

Corolario 3.3 (Curvas que se cruzan)**.** *Si f, g son continuas y se cortan en algunos puntos de $[a, b]$, el área de la región encerrada entre ellas es $\int_a^b |g - f|$. En la práctica: se hallan las intersecciones, se parte $[a, b]$ en ellas, y en cada trozo se integra (curva de arriba) − (curva de abajo).*

Proposición 3.4 (Integrando respecto de y)**.** *Si la región está limitada a la izquierda por $x = h(y)$ y a la derecha por $x = k(y)$, con $h \leq k$ continuas en $[c, d]$, su área es $\int_c^d (k(y) - h(y))\, \mathrm{d}y$.*

(Es la Proposición 3.2 después de reflejar respecto de la recta $y = x$, que conserva áreas.)

Cómo plantear un área

1. Graficar y hallar las intersecciones relevantes.
2. Decidir la variable: se elige la que *evita partir* la región (o la parte en menos trozos).
3. Integrar (superior − inferior) o (derecha − izquierda).

Ejemplo 3.5. Área de la región limitada por $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$.

Solución. $\ln x = 0 \iff x = 1$, luego la región está sobre $[1, e]$ y

$$A = \int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x = \big[x \ln x - x\big]_1^e = (e - e) - (0 - 1) = 1.$$

(La primitiva se obtiene por partes, o se verifica derivando.) ◀

Ejemplo 3.6. Área de la región limitada por $y = \dfrac{(x-2)^2}{9} - 1$, $y = \dfrac{2x+2}{5}$ y $x = 4$.

Solución. Sean $f(x) = \frac{(x-2)^2}{9} - 1$ y $g(x) = \frac{2x+2}{5}$. Igualando: $5x^2 - 38x - 43 = 0$, cuyas raíces son $x = -1$ y $x = \frac{43}{5}$. Solo $x = -1$ interesa (el punto es $(-1, 0)$) y en $[-1, 4]$ se tiene $g \geq f$ (por ejemplo, en $x = 0$: $g = \frac{2}{5} > f = -\frac{5}{9}$). Entonces

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{4} \Big[\frac{2x+2}{5} - \frac{(x-2)^2}{9} + 1\Big]\, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{5} + \frac{2x}{5} - \frac{(x-2)^3}{27} + x\Big]_{-1}^{4} \\ &= \Big(\frac{16}{5} + \frac{8}{5} - \frac{8}{27} + 4\Big) - \Big(\frac{1}{5} - \frac{2}{5} + 1 - 1\Big) = 9 - \frac{8}{27} = \frac{235}{27}. \end{aligned}$$

◀

Ejemplo 3.7 (Área *versus* integral con signo)**.** Área de la región limitada por $y = 1 - \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 4$.

Solución. La recta corta al eje x en $x = 2$: es positiva en $[-2, 2]$ y negativa en $[2, 4]$. Con $F(x) = x - \frac{x^2}{4}$:

$$\int_{-2}^{2} \Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = F(2) - F(-2) = 1 - (-3) = 4, \qquad \int_{2}^{4} \Big(1 - \frac{x}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = F(4) - F(2) = 0 - 1 = -1.$$

El área es $A = 4 + |-1| = 5$, mientras que $\int_{-2}^{4} f = 3$ *no* es un área. ◀

Ejemplo 3.8 (Frontera con varios tramos)**.** Área de la región acotada por arriba por las rectas $y = \frac{x}{3} + 1$ e $y = 5 - x$, y por abajo por la parábola $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 1$, con $x \geq 0$.

Solución. Las rectas se cortan en $(3, 2)$. La parábola corta a $y = \frac{x}{3} + 1$ en $x = 0$ (punto $(0, 1)$) y a $y = 5 - x$ en $x = 4$ (punto $(4, 1)$). Así, la frontera superior es $\frac{x}{3} + 1$ en $[0, 3]$ y $5 - x$ en $[3, 4]$:

$$A_1 = \int_0^3 \Big[\frac{x}{3} + 1 - \Big(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\Big)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \Big(\frac{7x}{3} - \frac{x^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{7x^2}{6} - \frac{x^3}{6}\Big]_0^3 = 6,$$
$$A_2 = \int_3^4 \Big[5 - x - \Big(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\Big)\Big]\,\mathrm{d}x = \int_3^4 \Big(4 + x - \frac{x^2}{2}\Big)\,\mathrm{d}x = \Big[4x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\Big]_3^4 = \frac{40}{3} - 12 = \frac{4}{3}.$$

Luego $A = A_1 + A_2 = 6 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3}$. ◀

Ejemplo 3.9 (Elegir la variable)**.** Área de la región limitada por $y^2 = x$ y $y = 2 - x$.

Solución. Las curvas se cortan en $(1, 1)$ y $(4, -2)$. *Integrando en y*: a cada altura $y \in [-2, 1]$ la región va de $x = y^2$ (izquierda) a $x = 2 - y$ (derecha):

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,\mathrm{d}y = \Big[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\Big]_{-2}^{1} = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{9}{2}.$$

Integrando en x hay que partir en $[0, 1]$ (entre $-\sqrt{x}$ y $\sqrt{x}$) y $[1, 4]$ (entre $-\sqrt{x}$ y $2-x$): $\int_0^1 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_1^4 (2 - x + \sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{9}{2}$. Mismo resultado, más trabajo. ◀

3.2. Longitud de una curva

Sea f continua en $[a, b]$. Para una partición $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ consideramos la poligonal inscrita en la gráfica, con vértices $(t_i, f(t_i))$, cuya longitud es

$$\ell(f, P) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta t_i)^2 + \big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big)^2}.$$

Por la desigualdad triangular, $\ell(f, P)$ no disminuye al refinar P.

Definición 3.10 (Longitud de arco)**.** La *longitud* de la gráfica de f en $[a, b]$ es $L = \sup_P \ell(f, P)$, cuando este supremo es finito (suponemos que la curva tienen longitud finita y es suave).

Teorema 3.11 (Fórmula de la longitud)**.** *Si f' es continua en $[a, b]$, entonces la gráfica de f tienen longitud finita y*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\,\mathrm{d}x.$$

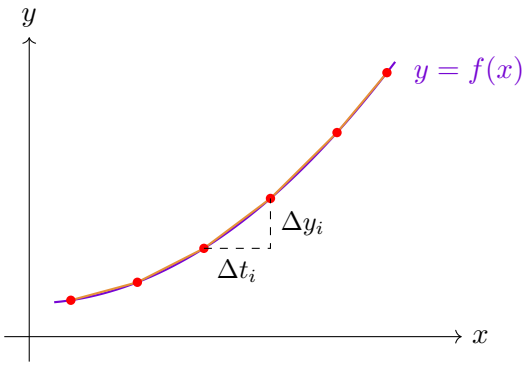

Figura 2: Poligonal inscrita en la gráfica; el segmento i-ésimo mide $\sqrt{(\Delta t_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$.

Demostración. Sea $h(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, continua. Dada P, por el Teorema del Valor Medio existe $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ con $f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta t_i$. Entonces el i-ésimo segmento mide

$$\sqrt{(\Delta t_i)^2 + \left(f'(\xi_i)\Delta t_i\right)^2} = h(\xi_i)\,\Delta t_i,$$

y por lo tanto

$$L(h, P) \le \sum_i h(\xi_i)\Delta t_i = \ell(f, P) \le U(h, P).$$

el miembro del medio es una suma de Riemann de la función h.

Luego, $L = \int_a^b h$.

□

Observación. (i) Si $f(x) = mx+n$ se obtiene $L = (b-a)\sqrt{1+m^2}$, la distancia entre los extremos.

(ii) Si la curva es $x = k(y)$ con k' continua en $[c, d]$, entonces $L = \int_c^d \sqrt{1 + [k'(y)]^2}\,\mathrm{d}y$ (la longitud no depende de los ejes).

Cómo calcular una longitud

1. Despejar $y = f(x)$ (o $x = k(y)$) *en el tramo pedido*, eligiendo la variable que dé una derivada más simple.
2. Calcular $1 + (f')^2$ y **simplificarlo**
3. Integrar

En general la integral no se calcula en forma elemental; por ejemplo, para $y = x^2$ en $[0, 1]$ resulta $L = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4}\ln(2 + \sqrt{5})$.

Ejemplo 3.12. $y = \dfrac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, desde $x = 0$ hasta $x = 3$.

Solución. $y' = x\sqrt{x^2 + 2}$, luego $1 + y'^2 = 1 + x^2(x^2 + 2) = (x^2 + 1)^2$ y

$$L = \int_0^3 (x^2 + 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 = 12.$$

◀

Ejemplo 3.13. $y = e^x$, desde $x = 0$ hasta $x = 2$.

Solución. $y' = e^x$, luego $1 + y'^2 = 1 + e^{2x}$ y

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + e^{2x}}\,\mathrm{d}x$$

Se resuelve con la sustitución $u^2 = 1 + e^{2x}$ y aplicando luego fracciones simples. ◀

3.3. Volúmenes de sólidos de revolución

Teorema 3.14 (Volumen por secciones)**.** *Sea S un sólido entre $x = a$ y $x = b$, y sea $A(x)$ el área de su sección perpendicular al eje x en x, con A continua. Entonces*

$$V(S) = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x.$$

Idea. La rebanada entre t_{i-1} y t_i contiene un cilindro de base de área m_i y altura Δt_i (con $m_i = \min A$ en el subintervalo) y está contenida en otro con base de área M_i (máximo). Por eso $L(A,P) \le V \le U(A,P)$ para toda P y $V = \int_a^b A$. (Un cilindro de base B y altura h tiene, por definición, volumen área$(B)\cdot h$; Cavalieri lo extiende a cilindros con cualquier base.)

3.4. Método de discos

Sea f continua en $[a,b]$. El sólido generado al girar alrededor del eje x la región $\{a \le x \le b,\ 0 \le y \le |f(x)|\}$ tiene, en cada x, una sección circular de radio $|f(x)|$:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

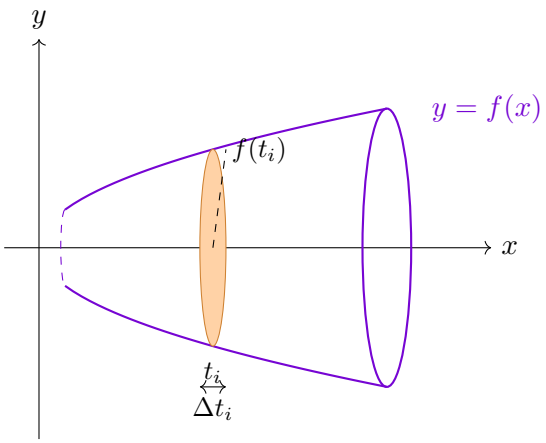

Figura 3: Cada rebanada se acota entre dos discos (cilindros) de radios $\min f$ y $\max f$; su volumen es aproximadamente $\pi f(t_i)^2 \Delta t_i$.

3.5. Método de arandelas

Sean f, g continuas con $0 \le g \le f$ en $[a,b]$ y R la región entre ambas gráficas. Al girar R alrededor del eje x, la sección en x es un anillo de radio exterior $f(x)$ y radio interior $g(x)$, de área $\pi f(x)^2 - \pi g(x)^2$:

$$V = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

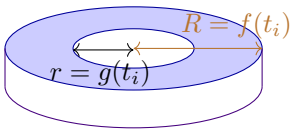

Figura 4: Arandela de espesor Δt_i: volumen $\pi(R^2 - r^2)\Delta t_i$.

Error frecuente

El volumen de la arandela es $\pi(R^2 - r^2)$, **no** $\pi(R - r)^2$. Es decir,

$$\pi \int_a^b (f^2 - g^2)\,\mathrm{d}x \;\neq\; \pi \int_a^b (f - g)^2\,\mathrm{d}x.$$

Tampoco vale (2) si g cambia de signo o si la región cruza el eje de giro: en ese caso los radios son las *distancias* al eje, $\max(|f|, |g|)$ y $\min(|f|, |g|)$ (o se parte la región).

3.6. Otros ejes de giro

- **Eje** $y = c$ (recta horizontal), con la región de un solo lado de la recta: los radios son las distancias $|f(x) - c|$ y $|g(x) - c|$ y se integra en x.
- **Eje** y **o recta** $x = c$ (vertical): se cortan rebanadas *horizontales* y se integra en y con $x = h(y)$, $x = k(y)$; los radios son las distancias $|h(y) - c|$ y $|k(y) - c|$.

Cómo plantear un volumen de revolución

1. Graficar la región y el eje de giro.
2. Trazar una rebanada *perpendicular al eje*: si toca el eje ⇒ disco; si no lo toca ⇒ arandela.
3. Escribir radio(s) como *distancias* al eje y área de la sección $A = \pi(R^2 - r^2)$.
4. Integrar A en la variable que recorre el eje (rebanadas perpendiculares al eje).

Ejemplo 3.15 (Disco)**.** Volumen al girar alrededor del eje x la región bajo $y = \sqrt{x}$, con $1 \le x \le 4$.

Solución. $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4 = \dfrac{15\pi}{2}$. ◀

Ejemplo 3.16 (Un cono)**.** Girar alrededor del eje x la región limitada por $y = 2 - x$, $x = 0$, $y = 0$.

Solución. $V = \pi \int_0^2 (2 - x)^2\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\pi}{3}(2 - x)^3\right]_0^2 = \dfrac{8\pi}{3}$. Verificación con la fórmula del cono, $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ con $r = h = 2$: $\frac{8\pi}{3}$. ✓ ◀

Ejemplo 3.17. Girar alrededor del eje x la región bajo $y = \operatorname{sen} x$, con $0 \le x \le \pi$.

Solución. Con $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$: $V = \pi \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left[x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right]_0^\pi = \dfrac{\pi^2}{2}$. ◀

Ejemplo 3.18 (Arandelas)**.** Girar alrededor del eje x la región entre $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.

Solución. Las curvas se cortan en $x = 0$ y $x = 1$, y en $[0, 1]$: $0 \le x^2 \le \sqrt{x}$. Radio exterior $\sqrt{x}$, radio interior x^2:

$$V = \pi \int_0^1 (x - x^4)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}.$$

◀

Ejemplo 3.19 (La misma región alrededor del eje y)**.**

Solución. Rebanadas horizontales: a la altura $y \in [0,1]$ la región va de $x = y^2$ (izquierda) a $x = \sqrt{y}$ (derecha). Radio exterior $\sqrt{y}$, radio interior y^2:

$$V = \pi \int_0^1 (y - y^4)\,\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{10}.$$

(Coincide con el ejemplo anterior por la simetría $x \leftrightarrow y$ de la región.) ◀

Ejemplo 3.20 (Una región, cinco ejes)**.** Sea R la región limitada por $y = x^2$ e $y = 4$. Calcular el volumen al girar R alrededor de: (a) el eje y; (b) la recta $y = 4$; (c) el eje x; (d) la recta $y = -1$; (e) la recta $x = 2$.

Solución.

(a) *Eje y.* La región toca el eje: discos horizontales. Basta girar la mitad $x \geq 0$ (la otra mitad genera el mismo sólido; usar las dos duplicaría el sólido *sobre sí mismo*). Radio $\sqrt{y}$: $V = \pi \int_0^4 y\,\mathrm{d}y = 8\pi$.

(b) *Recta $y = 4$.* La región toca la recta: discos verticales de radio $4 - x^2$: $V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x = \dfrac{512\pi}{15}$.

(c) *Eje x.* La región no toca el eje: arandelas de radio exterior 4 e interior x^2: $V = \pi \int_{-2}^{2} (16 - x^4)\,\mathrm{d}x = \dfrac{256\pi}{5}$.

(d) *Recta $y = -1$.* Radios (distancias a la recta): exterior $4 + 1 = 5$, interior $x^2 + 1$: $V = \pi \int_{-2}^{2} [25 - (x^2+1)^2]\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-2}^{2} (24 - 2x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1088\pi}{15}$.

(e) *Recta $x = 2$.* Rebanadas horizontales. A la altura $y \in [0,4]$ la región va de $x = -\sqrt{y}$ a $x = \sqrt{y}$, y queda a la izquierda de $x = 2$. Distancias a la recta: exterior $2 + \sqrt{y}$, interior $2 - \sqrt{y}$; y $(2+\sqrt{y})^2 - (2-\sqrt{y})^2 = 8\sqrt{y}$: $V = 8\pi \int_0^4 \sqrt{y}\,\mathrm{d}y = 8\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot 8 = \dfrac{128\pi}{3}$.

◀

Ejemplo 3.21. Girar alrededor del eje y la región limitada por $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ y $x = a$.

Solución. A cada altura $y \in [-2a, 2a]$ la región va de $x = \frac{y^2}{4a}$ a $x = a$: radio exterior a, interior $\frac{y^2}{4a}$.

$$V = \pi \int_{-2a}^{2a} \Big(a^2 - \frac{y^4}{16a^2}\Big)\,\mathrm{d}y = \pi \Big[a^2 y - \frac{y^5}{80a^2}\Big]_{-2a}^{2a} = 2\pi\Big(2a^3 - \frac{2a^3}{5}\Big) = \frac{16\pi a^3}{5}.$$

◀

4. Resumen y errores frecuentes

Cantidad	Fórmula	Condiciones
Área entre gráficas	$\int_a^b (g-f)\,\mathrm{d}x$	$f \le g$ continuas; si se cruzan, usar $\lvert g-f\rvert$
Área (en y)	$\int_c^d (k(y)-h(y))\,\mathrm{d}y$	$h \le k$
Volumen (discos, eje x)	$\pi\int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x$	región entre $y=f$ e $y=0$
Volumen (arandelas, eje x)	$\pi\int_a^b (f^2-g^2)\,\mathrm{d}x$	$0 \le g \le f$
Volumen (eje $y=c$)	$\pi\int_a^b (R(x)^2-r(x)^2)\,\mathrm{d}x$	R, r: distancias a la recta
Volumen (eje vertical)	$\pi\int_c^d (R(y)^2-r(y)^2)\,\mathrm{d}y$	R, r: distancias al eje
Longitud	$\int_a^b \sqrt{1+(f')^2}\,\mathrm{d}x$	f' continua
Longitud (en y)	$\int_c^d \sqrt{1+(k')^2}\,\mathrm{d}y$	k' continua

Lista de verificación

- Integral con signo $\neq$ área: partir donde la función cambia de signo o donde las curvas se cruzan.
- Arandelas: $\pi(R^2-r^2)$, no $\pi(R-r)^2$.
- Radios = *distancias* al eje de giro (sumar o restar la constante del eje).
- Al girar alrededor de un eje que atraviesa la región, no duplicar el sólido: usar solo un lado.
- Longitud: hace falta que f' sea continua en *todo* el intervalo cerrado (si no, integral impropia) y simplificar el radicando.
- Cambiar de variable ($x \leftrightarrow y$) suele ahorrar trozos.

5. Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1. Área de la región limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

Ejercicio 5.2. Área de la región limitada por $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 5.3. Área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Ejercicio 5.4. Volumen al girar alrededor del eje x la región bajo $y = x^2$, $0 \le x \le 2$.

Ejercicio 5.5. Volumen al girar la región entre $y = x$ e $y = x^2$ alrededor de (a) el eje x; (b) el eje y.

Bibliografía

- M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Ed. Reverté (capítulos sobre integrales y Teorema Fundamental del Cálculo, y sus problemas).
- E. Hernández Saborío, *Aplicaciones de la integral definida*, Revista digital Matemática, Educación e Internet, Instituto Tecnológico de Costa Rica (fuente de varios ejemplos).