Campos conservativos: afirmaciones equivalentes

Preliminares:

En clase se demostró que dada una curva $\mathcal{C}$, suave (eventualmente suave a trozos), de $\mathbb{R}^n$, y una función escalar $\phi : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, clase C^1 al menos sobre $\mathcal{C}$, se tiene:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{\nabla}\phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\phi(\vec{r}(t))\right] dt = \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

Donde se hace uso de la definición de integral de línea, y de regla de la cadena. Además, se ha supuesto que $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es una paremetrización de la curva $\mathcal{C}$, por lo tanto una *trayectoria* suave (suave a trozos).

En clase también se vio la definición de *campo conservativo*:

Definición

Sea $\vec{F} : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ un campo vectorial C^1 en el abierto $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^n$. Dado un abierto Ω, con $\Omega \subseteq \Omega_0$, se dirá que $\vec{F}$ es <u>*conservativo*</u> en Ω si existe una función escalar ϕ, tal que $\phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es clase C^1 en Ω y $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{\nabla}\phi(\vec{x})$, para todo $\vec{x}$ que pertenece a Ω.

Recordamos que en clase también se definió *curva simple*, *curva simple orientada* y *curva cerrada simple*. Cada una de estas definiciones se vuelve necesaria para el siguiente teorema, en el que se hacen *afirmaciones equivalentes*, las que serán demostradas.

TEOREMA

Sea $\vec{F}$ un campo clase[1] C^1 *en* $\mathbb{R}^3$ *excepto, quizá, en un número finito de puntos. Las siguientes* ***afirmaciones*** *sobre $\vec{F}$ son* ***equivalentes****:*

1. Para cualquier curva cerrada simple orientada $\mathcal{C}$, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.
2. Para cualquier par de curvas simples orientadas, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, que tengan los mismos extremos, $\int_{\mathcal{C}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.
3. $\vec{F}$ es el gradiente de alguna función escalar ϕ. Más aun, si $\vec{F}$ no está definido en determinados puntos, ϕ tampoco lo estará en esos puntos.
4. El rotor del campo $\vec{F}$ es nulo ($\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$).

Corolario: Un campo vectorial que satisfaga una de las condiciones anteriores, y por lo tanto todas, se denomina *campo vectorial conservativo.*

Demostración:[2]
Hay que demostrar que $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$

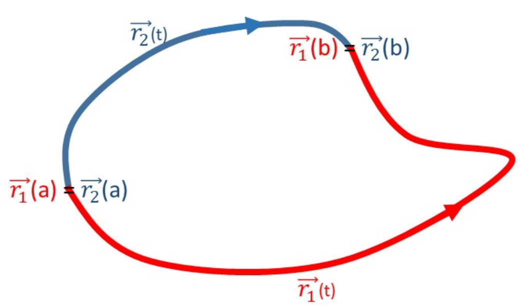

Figura 1: Curva $\mathcal{C}_1$, parametrizada por $\vec{r}_1$ (rojo), y curva $\mathcal{C}_2$ parametrizada por $\vec{r}_2$ (azul), con los mismos extremos.

[1] Un campo vectorial se dice C^1 si son C^1 cada una de las componentes escalares que lo definen.
[2] Todo lo que se demostrará es para $\mathbb{R}^n$, con $3 \leq n$. Se deben tener precauciones al trabajar en $\mathbb{R}^2$.

Estamos suponiendo que $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son parametrizaciones que respresentan a las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$, respectivamente, con las orientaciones tal se indica en la Fig. 1. Además, ambas tienen los mismos extremos. Ahora podemos armarnos la curva cerrada simple, orientada positivamente, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^+ \cup \mathcal{C}_2^-$. Esto es, una reparametrización de $\mathcal{C}_2$, invirtiendo el sentido.

Sabemos:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{C}_2^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Por hipótesis, $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Luego:

$$\int_{\mathcal{C}_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

De aquí que:

$$\int_{\mathcal{C}_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$2 \Rightarrow 3$

Esta demostración es interesante desde el punto de vista de *cómo se procede* en una demostración por construcción.

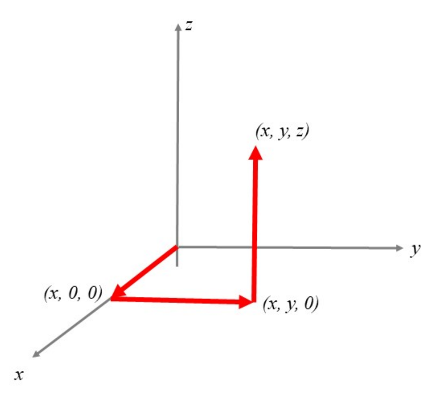

Figura 2: Paso 1.

Vamos a trabajar con la hipótesis de independencia de camino. Es decir, siempre vamos a partir desde el mismo punto (arbitrariamente se ha tomado el origen, suponiendo que no hay problemas allí) y se va a arribar al mismo punto (x, y, z), independientemente del camino elegido.

Además, vamos a usar la siguiente definición: dados un campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (F_1, F_2, F_3)$, y una curva $\mathcal{C}$, parametrizada por $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, con $t \in \mathbb{R}$, la integral de línea puede escribirse como:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^\tau F_1 x'(t)dt + \int_0^\tau F_2 y'(t)dt + \int_0^\tau F_3 z'(t)dt$$

Donde se supone, arbitrariamente a los fines de operar con la definición, que la curva comienza en $\vec{r}(0)$ y termina en $\vec{r}(\tau)$.

Paso 1:
Se recorrerá el camino $(0, 0, 0) \longrightarrow (x, 0, 0) \longrightarrow (x, y, 0) \longrightarrow (x, y, z)$. Es decir, una trayectoria que une $(0, 0, 0)$ con (x, y, z).

Se ve, además, que este camino (curva) requiere parametrizaciones sencillas.[3]

Ahora se propone que el resultado de la integral de línea es una función que llamaremos, arbitrariamente, ϕ.

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)dt + \int_0^y F_2(x, t, 0)dt + \int_0^z F_3(x, y, t)dt$$

Es inmediato, por Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) = F_3(x, y, z)$$

Paso 2:
Ahora la trayectoria elegida que une $(0, 0, 0)$ con (x, y, z) está dada, tal se muestra en la Fig. 3, por:

$(0, 0, 0) \longrightarrow (x, 0, 0) \longrightarrow (x, 0, z) \longrightarrow (x, y, z)$

Donde, ahora, ϕ puede ser escrita como:

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)dt + \int_0^z F_3(x, 0, t)dt + \int_0^y F_2(x, t, z)dt$$

[3] Sugerencia: hacer estas parametrizaciones.

Nuevamente aplicamos TFC, y ahora resulta:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) = F_2(x, y, z)$$

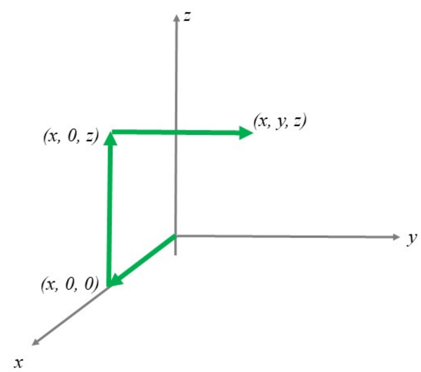

Figura 3: Paso 2.

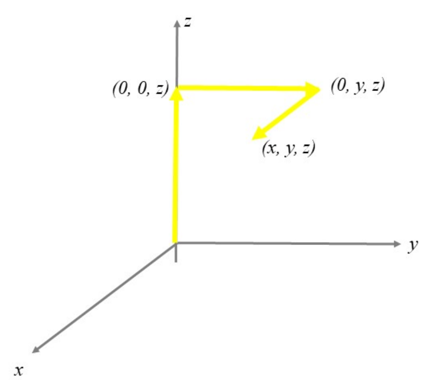

Figura 4: Paso 3.

Se procede de igual forma. Según se ve en la Fig. 4, se toma una trayectoria tal, que se unen los puntos $(0, 0, 0)$ y (x, y, z) de la siguiente manera:

$(0, 0, 0) \longrightarrow (0, 0, z) \longrightarrow (0, y, z) \longrightarrow (x, y, z)$

ϕ en este caso se escribe como:

$$\phi(x,y,z) = \int_0^z F_3(0,0,t)dt + \int_0^y F_2(0,t,z)dt + \int_0^x F_1(t,y,z)dt$$

Sabemos por TFC que:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = F_1(x,y,z)$$

Por lo tanto se ve que:

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1,F_2,F_3) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z)\right) = \vec{\nabla}\phi(x,y,z)$$

Donde F_1, F_2 y F_3 son funciones escalares de (x,y,z).

$3 \Rightarrow 4$
Si $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$, se vuelve trivial demostrar que $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = \vec{0}$. Se deja para la realización de esta operación, imponiendo las condiciones que sean necesarias sobre ϕ para obtener el resultado buscado.

A todo campo cuyo rotor es nulo, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, se lo denomina campo irrotacional.

$4 \Rightarrow 1$
La demostración de esta implicación es de naturaleza compleja si quisiéramos hacerla sin más. Pero como veremos en próximas clases, si estamos en las condiciones del *Teorema de Stokes*,[4] la demostración es consecuencia directa del consecuente de dicho teorema, que (sin otras menciones) se puede escribir como:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$$

Es inmediato que si $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$, $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Observación: cuando $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ se dice que la <u>circulación</u> debida al campo $\vec{F}$ es nula.

[4]Veremos este teorema dentro de dos clases.

Casos especiales, campos en $\mathbb{R}^2$.

En $\mathbb{R}^2$, a diferencia de $\mathbb{R}^3$, no se permiten puntos excepcionales. Dicho de otra manera, el teorema precedente vale en $\mathbb{R}^2$ si $\vec{F}$ está definido y es clase C^1 en un conjunto abierto convexo.[5]

Definición

Dado un conjunto D, D se dirá <u>*convexo*</u>, si la recta que une cualquier par de puntos de D, P_1 y P_2, está contenida en D.

Ejemplo:
Calcular la integral de línea sobre una circunferencia de radio 1 y centrada en el origen para el campo $\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Sol.
Es evidente que $\vec{F}$ no está definido en el origen, por lo que debemos excluir el punto $(0,0)$. Luego, $\vec{F}$ es un campo clase C^1, dado que es cociente de funciones clase C^1 (donde ya quedan exluidos los ceros denominador en el dominio del campo).

Ahora hacemos la integral de línea sobre la curva cerrada dada, es decir $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

$\mathcal{C} = \left\{(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x^2 + y^2 = 1\right\}$

Sobre la curva $\mathcal{C}$ el campo $\vec{F}$ está bien definido, y cumple con las condiciones de definición de *integral de línea*.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r'}(t)dt$$

Una posible parametrización para $\mathcal{C}$ es $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, con $\vec{r}(t) = (cos(t), sen(t))$, de lo que se sigue que $\vec{r'}(t) = (-sen(t), cos(t))$.

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left(-\frac{sen(t)}{(cos(t))^2 + (sent(t))^2}, \frac{cos(t)}{(cos(t))^2 + (sent(t))^2}\right) = (-sen(t), cos(t))$$

Por lo cual:

[5] ver Marsden, J. E., & Tromba, A. J. *Cálculo vectorial.*

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r'}(t)dt = \int_0^{2\pi} (-sen(t), cos(t))\cdot(-sen(t), cos(t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

Ahora vamos a ver algo importante.

Vamos a extender[6] el campo $\vec{F}$ a $\vec{F}^* = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right) = (P(x,y), Q(x,y), 0)$. Hacemos $\vec{\nabla} \times \vec{F}^*$, y vamos a ver qué resultado obtenemos.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}^* = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Haciendo cuentas obtenemos que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, por lo que $\vec{\nabla} \times \vec{F}^* = \vec{0}$.

Esto no contradice el teorema enunciado, porque la región de $\mathbb{R}^{\not\models}$ que se determina entre el dominio del campo y la curva -como borde exterior de dicha región- no es un conjunto convexo. Sug.: graficar para interpretar todo lo dicho en este párrafo.

Definición

Se dirá que un conjunto es ***conexo*** cuando dos elementos del mismo pueden conectarse por una curva continua y suave.

Un conjunto abierto y conexo se llama **simplemente conexo** cuando todo camino cerrado en el dominio puede deformarse de forma continua hasta convertirse en un punto del dominio sin salirse de él.

Ahora se está en las condiciones de enunciar un teorema para campos conservativos en $\mathbb{R}^2$.

TEOREMA

Sea $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, D una región abierta simplemente conexa. Sea $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo clase C^1 en D, con $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ para todo $(x,y) \in D$, entonces $\vec{F}$ es un campo conservativo en D.

Del eneunciado de este teorema se vuelve evidente que para que el campo sea conservativo se necesita que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, por lo cual si $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$ garantiza que el campo $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ es no conservativo en la región D.

[6] Se hace esta extensión para estar en las condiciones de definición del rotor del campo.

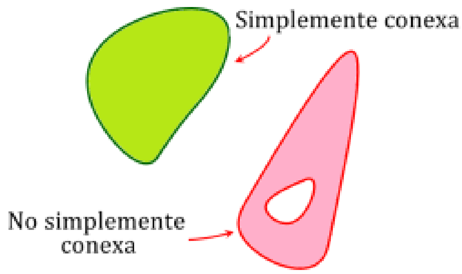

Figura 5: Regiones en el plano (figura tomada de `http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/78554`).

Volvemos al ejemplo, vemos que si bien $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, la región es una región no simplemente conexa, por lo que no se está en las condiciones del teorema.

Advertencia: si se está trabajando en $\mathbb{R}^2$ no se debe descuidar estudiar sobre qué tipo de región se está trabajando.

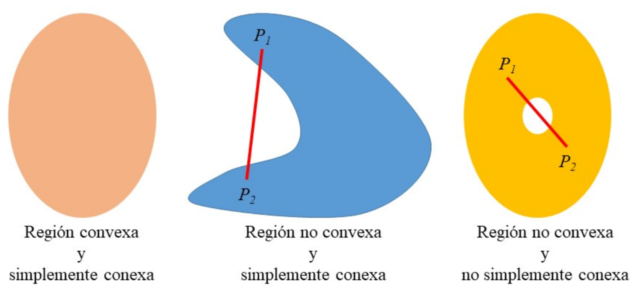

Figura 6: Esquema gráfico de regiones en $\mathbb{R}^2$.