Complementos de análisis real

Esteban Baragatti

Eduardo Ghiglioni

Pedro Massey

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata

Índice

1 Introducción **3**

2 El sistema de números reales **4**

2.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ 4
2.2 Conjuntos ordenados 9
2.3 Cuerpos 11
2.4 La recta real extendida 18
2.5 Complejos 19
2.6 Conjuntos numerables 20
2.7 Ejercicios del texto 23
2.8 Ejercicios nuevos 26

1 Introducción

El siguiente apunte es un extracto del curso 2021 de complementos de análisis el cual abarca los temas comprendidos por el plan de estudios de la Licenciatura en Matemática de la Universidad Nacional de La Plata - Facultad de Ciencias Exactas - Departamento de Matemática. Dicho programa se detalla a continuación:

1. SISTEMA DE NÚMEROS REALES: El sistema de números reales como cuerpo ordenado y completo. Cortaduras de Dedekind. Sistema ampliado de números reales. Los espacios euclídeos.

2. TOPOLOGÍA DE $\mathbb{R}^n$: Conjuntos abiertos y cerrados. Interior, clausura, frontera y puntos de acumulación. Conjuntos compactos. Teorema de Heine-Borel.

3. SUCESIONES NUMÉRICAS Y SERIES: Sucesiones convergentes. Subsucesiones. Sucesiones de Cauchy. Límites subsecuenciales. Límites superior e inferior. Series. Convergencia absoluta y condicional de las series. Criterios básicos de convergencia para series de términos no negativos. Series de potencias. Reordenaciones.

4. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES: Límite y continuidad. Continuidad y compacidad. Diferencial de una función real. Teoremas de la función inversa e implícita.

5. LA INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES: Definición y existencia de la integral. Integración y diferenciación.

6. SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES: Convergencia uniforme. Convergencia uniforme y continuidad. Convergencia uniforme e integración. Convergencia uniforme y diferenciación. Familias equicontinuas de funciones.

7. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: Existencia y unicidad de EDO's. Ecuaciones lineales. Ecuación diferencial ordinaria de orden n.

Este material está destinado a alumnos que ya obtuvieron conocimientos básicos de análisis matemático y buscan formalizar el lenguaje. Por ello, algunos de los resultados pueden resultar conocidos para el lector, pero son rigurosamente demostrados en este apunte.

Varios capítulos y ejercicios de este apunte están basados en el libro de Rudin, W. (1980), Principios de análisis matemático (3.ª ed.), McGraw-Hill. A lo largo de todo el texto vamos a dejar varios detalles para el lector y en esos casos escribimos □. Una vez que el lector complete estos detalles (es muy recomendable hacer esto, porque colabora con la compresión detallada del contenido del texto), el lector puede pintar el cuadradito de forma que quede el famoso símbolo ■ de detalle resuelto o prueba concluida. Cada capítulo termina con una primera sección de *Ejercicios del texto* que recopila todas las tareas □. Luego sigue una segunda sección de *Ejercicios nuevos* para practicar; en esta sección aparecerán algunos ejercicios marcados con $(*)$ los cuales pueden tomarse como optativos o ampliatorios porque requieren un poco más de desarrollo pero que sirven para profundizar aspectos teóricos o temáticas complementarias del capítulo.

2 El sistema de números reales

En esta sección formalizamos la base sobre la cual se desarrolla el resto del curso: los números reales. En los procesos de formalización es usual asumir una serie de afirmaciones básicas (axiomas) y construir la teoría desde estas afirmaciones básicas. En nuestro caso, nuestras afirmaciones básicas tienen que ver con los números naturales $\mathbb{N}$. Una vez que asumimos estas afirmaciones sobre $\mathbb{N}$, el resto de los números ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) surgen de construcciones explícitas que realizaremos con cierto detalle. De forma similar, las propiedades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ que vamos a considerar estarán justificadas (probadas) a partir de las propiedades que hemos asumido de $\mathbb{N}$.

2.1 $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$

Comenzamos asumiendo que contamos con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en el que está definida una operación binaria que denotamos $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que tiene las siguientes propiedades: para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$:

S1. Asociatividad: $n + (m + p) = (n + m) + p$.

S2. Conmutatividad: $n + m = m + n$.

S3. Existencia de neutro: $0 + n = n$.

S4. Cancelación: $n + m = n + p \implies m = p$.

En este caso decimos que $\mathbb{N}$ es un monoide abeliano cancelativo. La asociatividad nos permite escribir expresiones del tipo $m_1 + \ldots + m_n$ sin ambigüedad (notar que debemos elegir alguna forma para asociar los términos para poder sumar: pero la suma no depende de cómo asociamos).

Además, $\mathbb{N}$ posee una relación de orden " $\leq$ " compatible con la estructura anterior:

O1. $n \leq m$ si y solo si existe p tal que $n + p = m$.

O2. Si $n \leq m$ entonces $n + p \leq m + p$.

O3. Dados n, $m \in \mathbb{N}$ se verifica que $n \leq m$ o $m \leq n$.

O4. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ es no vacío entonces A tiene un primer elemento.

Acorde con lo que aceptamos válido para $\mathbb{N}$, el *Principio de buena ordenación* O4 es equivalente ($\square$) al *Principio de inducción*:

O4'. Si $A \subseteq \mathbb{N}$ cumple que $0 \in A$ y $(\forall\, n \in \mathbb{N})(n \in A \to n + 1 \in A)$ entonces $A = \mathbb{N}$.

Definición 2.1. Una relación de orden es una relación binaria que permite comparar los elementos de un conjunto. Esta relación cumple las siguientes propiedades: reflexividad, antisimetría y transitividad.

a) Reflexividad: Todo elemento está relacionado consigo mismo.

b) Antisimetría: Si x está relacionado con y, e y está relacionado con x, entonces x e y son el mismo elemento.

c) Transitividad: Si x está relacionado con y, e y está relacionado con z, entonces x está relacionado con z.

Además de las propiedades anteriores, si se cumple que para cualquier par de elementos x e y, x está relacionado con y o y está relacionado con x, decimos que el orden es total. En caso contrario decimos que el orden es parcial. △

Hasta aquí hemos considerado las propiedades de $\mathbb{N}$ que vamos a asumir como ciertas. En adelante, vamos a construir y justificar con cierto detalle todo lo que hagamos.

Observar que podemos definir otra operación binaria que denotamos por $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$0 \cdot n = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \qquad n \cdot m = \underbrace{m + \ldots + m}_{\text{suma de } n \text{ términos}} \in \mathbb{N} \text{ para } n \geq 1\,.$$

Lo anterior define el producto que verifica las siguientes propiedades (demostrar estas propiedades es un gran □): para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$

P1. Asociatividad: $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.

P2. Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$.

P3. Existencia de neutro: $1 \cdot n = n$.

P4. si $n \cdot m = 0$ entonces $n = 0$ o $m = 0$.

P5. Si $m \leq p$ entonces $n \cdot m \leq n \cdot p$.

D. Distributividad: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$.

La propiedad P4. implica la simplificación: si $n \neq 0$ y $n \cdot m = n \cdot p$ entonces $m = p$.

A partir de $\mathbb{N}$ nuestro objetivo ahora es *construir* $\mathbb{Z}$.

Nota histórica. Los enteros negativos (y el 0) surgieron después que los naturales. En cierto sentido, parecían absurdos porque eran "nuevos números" que representaban "algo menor que nada". Hoy esa visión parece anticuada: la escuela nos "ajusta" temprano a los enteros negativos y nos da usos prácticos. Es natural responder "¿Cuánto cambió la temperatura de 10 p.m. a 11 p.m.?" con "-1°C". Similarmente, las velocidades 15 m/s y -15 m/s tienen significados físicos distintos. Otro ejemplo natural surge a partir del desarrollo del álgebra: en $\mathbb{N}$, resolvemos la ecuación $x + 7 = 8$ pero no $x + 8 = 7$. En este sentido, se consideró más satisfactorio inventar "nuevos números" para que todas las ecuaciones $x + m = n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ tuvieran solución, en lugar de decir que algunas no la tienen.

Motivación. El párrafo anterior contiene la semilla de una idea. Por ejemplo, queremos un número "$7 - 8$". Partiendo de $\mathbb{N}$, podríamos decir que el par ordenado $(7, 8)$ es un entero (a llamar -1): es la "respuesta" a $7 - 8$. Similarmente, $(8, 7)$ sería el entero 1 (respuesta a $8 - 7$). Es decir, "Un entero es un par ordenado de números naturales". Esto parece prometedor, pero es demasiado simple: este enfoque daría "demasiados" enteros. Siguiendo esta lógica, los pares $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4), \ldots$ representarían las "respuestas" a $1 - 2$, $2 - 3$, $3 - 4, \ldots$; es decir, ¡todos estos pares deberían considerarse el mismo entero! En general, si $m - n = p - q$ (en $\mathbb{Z}$ informal), queremos que (m, n) y (p, q) representen el mismo entero. Podemos expresar esto sin mencionar resta: queremos que (m, n) y (p, q) representen el mismo entero si $m + q = n + p$. En este caso los tratamos como "iguales" mediante una relación de equivalencia que los agrupa en la misma clase.

Definición 2.2. Consideramos

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) : \ n, m \in \mathbb{N}\}.$$

En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = p + n \in \mathbb{N}\,.$$

(notemos que la *suma* en la definición anterior es la suma en $\mathbb{N}$, que es la *única* operación de suma que tenemos definida). △

Es sencillo verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia (acá se usa la propiedad de cancelación, □).

Definición 2.3. Consideramos entonces el conjunto cociente

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim = \{[(m, n)] \ : \ m,\, n \in \mathbb{N}\}\,,$$

donde $[(m, n)]$ denota la clase de equivalencia de (m, n) según $\sim$. △

Ejemplo 2.4. ¿Cómo son las clases de equivalencia de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$? Por ejemplo:

$$[(0, 5)] = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), \ldots, (n, n + 5), \ldots\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

△

El siguiente teorema contiene una de las claves de estas clases de equivalencias, pues siempre podemos pensar en las clases de equivalencias de $[(0, k)]$ o $[(k, 0)]$ para algún $k \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.5. *Toda clase de equivalencia $[(m, n)]$ contiene un par ordenado con al menos una coordenada 0. Por lo tanto, toda clase puede escribirse como $[(0, k)]$ o $[(k, 0)]$ para algún $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

Si $m \leq n$ en $\mathbb{N}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m + k = n = 0 + n$ (Por O1.). Esto implica que $(m, n) \sim (0, k)$, luego $[(m, n)] = [(0, k)]$.

Si $n < m$ en $\mathbb{N}$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k + n = n + k = m = 0 + m = m + 0$ (Por O1. y S2.). Entonces $(m, n) \sim (k, 0)$, luego $[(m, n)] = [(k, 0)]$. ■

Obs 2.6. Según el teorema anterior, podemos listar todas las clases de equivalencia como:

$$\ldots, \quad [(0, 3)], \quad [(0, 2)], \quad [(0, 1)], \quad [(0, 0)], \quad [(1, 0)], \quad [(2, 0)], \quad [(3, 0)], \quad \ldots$$

△

El siguiente paso es definir en $\mathbb{Z}$ la suma y multiplicación. Para la suma tenemos la siguiente definición.

Definición 2.7. Podemos definir una operación binaria $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$[(m, n)] + [(p, q)] = [(m + p, n + q)] \in \mathbb{Z}\,.$$

△

Notemos que la operación en $\mathbb{Z}$ queda bien definida en función de la suma en $\mathbb{N}$ (□ Sugerencia: recordemos que hemos aceptado la existencia de $\mathbb{N}$ con todas sus propiedades). En este caso, se verifica que la suma en $\mathbb{Z}$ verifica la propiedad asociativa S1 (□), donde el neutro $0_{\mathbb{Z}} = [(0, 0)] = [(n, n)]$, para $n \in \mathbb{N}$. Además, si $[(m, n)] \in \mathbb{Z}$ existe el opuesto $[(n, m)] \in \mathbb{Z}$ tal que

$$[(m, n)] + [(n, m)] = [(m + n, m + n)] = [(0, 0)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

En este caso escribimos $[(n, m)] = -[(m, n)]$, que determina una operación 1-aria en $\mathbb{Z}$. Así, vale

S5 Si $x \in \mathbb{Z}$ existe $-x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (-x) = 0$.

La existencia del elemento opuesto y las propiedades anteriores hacen de $\mathbb{Z}$ un grupo abeliano conmutativo (en donde vale, en particular, la cancelación. Verificar que valen todas las propiedades $\square$).

Además, si $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ está dada por $\rho(n) = [(n, 0)] := n_{\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$ entonces ρ verifica:

$$\rho(x) = [(0, 0)] := 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{y} \quad \rho(m + n) = \rho(m) + \rho(n)\,.$$

En este caso ρ es una función inyectiva que permite identificar n con $\rho(n) \in \mathbb{Z}$. De esta forma, en adelante, consideramos $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ vía la identificación dada por ρ.

Más aún, notemos que $-\rho(n) = -[(n, 0)] = [(0, n)]$ de forma que todo elemento en $\mathbb{Z}$ se puede escribir

$$[(m, n)] = [(m, 0)] + [(0, n)] = \rho(m) + (-\rho(n)) = \rho(m) - \rho(n)\,.$$

En general, para cada $n \in \mathbb{N}$, el entero $[(0, n)]$ se denotará $-n_{\mathbb{Z}}$ y el entero $[(n, 0)]$ se denotará $n_{\mathbb{Z}}$. De esta forma quedan definidos los números enteros $\mathbb{Z}$.

Para definir la multiplicación en $\mathbb{Z}$ pensemos lo siguiente.

Motivación. Recordar que pensamos a la clase $[(m, n)]$ como resultado de $m - n$. En ese sistema:

$$(m - n) \cdot (p - q) = (m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q).$$

Así, el producto debe ser el entero que "corresponde" a $(m \cdot p + n \cdot q) - (n \cdot p + m \cdot q)$.

Definición 2.8. Podemos definir un producto en $\mathbb{Z}$ dado por

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] = [(mp + nq, mq + np)].$$

$\triangle$

Definido de esta manera, el producto verifica las propiedades P1.-P3. en $\mathbb{Z}$ $\square$. Además, vale que

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] = 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow [(m, n)] = 0_{\mathbb{Z}} \quad \text{ó} \quad [(p, q)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

La propiedad anterior garantiza la simplificación: si $[(m, n)] \neq 0_{\mathbb{Z}}$ entonces:

$$[(m, n)] \cdot [(p, q)] = [(m, n)] \cdot [(r, s)] \implies [(p, q)] = [(r, s)]\,.$$

Por otro lado, también se verifica la propiedad D (distributiva) en $\mathbb{Z}$ ($\square$).

Finalmente, definimos el orden en $\mathbb{Z}$ dado por: si a, $b \in \mathbb{Z}$ entonces $a \leq b$ si $b - a \in \mathbb{N}(\subseteq \mathbb{Z})$. En este caso se verifican las propiedades O2 y O3 en $\mathbb{Z}$. Además, se verifica P5 siempre que $n \in \mathbb{N}$ (todo lo anterior es un súper $\square$). Además, ρ respeta las operaciones suma, producto, el neutro de la suma y del producto; ρ también respeta el orden en $\mathbb{N}$. De esta forma, $\mathbb{N}$ se identifica completamente con $\rho(\mathbb{N})$, lo cual hace más claro que la inclusión $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ está bien propuesta.

Obs 2.9. Notemos que esta versión que hemos construido de $\mathbb{Z}$ describe a $\mathbb{Z}$ como un espacio cociente. Esto contrasta un poco con la idea que uno tiene de $\mathbb{Z}$ como *números*. Sin embargo, una vez establecidas las propiedades usuales de $\mathbb{Z}$ en esta construcción particular, podemos pensar a $\mathbb{Z}$ nuevamente como números: es decir, lo importante no es la naturaleza de los elementos de $\mathbb{Z}$ (por ejemplo) sino las relaciones entre estos elementos (la existencia de las operaciones que satisfacen las propiedades que estamos acostumbrados a usar de $\mathbb{Z}$). $\triangle$

Y ya que estamos, seguimos *construyendo* $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$.

Motivación. La idea aquí es definir una relación de equivalencia $\approx$ en $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ (el conjunto de pares ordenados de enteros cuya segunda componente es distinta de cero) para la cual si $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ y $n\in\mathbb{Z}$ entonces $(p,q)\approx(np,nq)$. Recordemos nuestra comprensión intuitiva de las fracciones para ver cómo podríamos definir esta relación de equivalencia. Si dos fracciones son iguales, podemos "multiplicar en cruz" para obtener una expresión puramente en términos de enteros. Es decir, si $\dfrac{p}{q}=\dfrac{r}{s}$ entonces $p\cdot s=r\cdot q$. Usaremos esto para definir la siguiente relación.

Definición 2.10. Definimos $\mathbb{Z}^*=\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ y consideramos una relación en

$$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*=\{(p,q):\ p\in\mathbb{Z}\,,\ q\in\mathbb{Z}^*\}$$

dada por

$$(p,q)\approx(r,s)\Leftrightarrow p\cdot s=r\cdot q\,.$$

(notemos que el producto en la definición anterior es el producto en $\mathbb{Z}$, que hemos construido previamente). △

Una vez verificado el hecho de que $\approx$ es una relación de equivalencia (□), podemos considerar el conjunto cociente

$$\mathbb{Q}:=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\approx=\{\overline{(p,q)}\ :\ p,q\in\mathbb{Z},\ q\neq0\}\,.$$

donde $\overline{(p,q)}$ denota la clase de equivalencia de (p,q) con respecto a la relación $\approx$.

Ejemplo 2.11. Los siguientes son todos elementos de $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned}[(1,2)]&=\{(1,2),(2,4),(3,6),\ldots\},\\ [(-3,4)]&=\{(-3,4),(3,-4),(-30,40),\ldots\},\\ [(5,1)]&=\{(5,1),(15,3),(45,9),\ldots\},\\ [(0,1)]&=\{(0,1),(0,2),(0,-4),\ldots\}.\end{aligned}$$

△

En este caso, podemos definir las operaciones binarias

$$\overline{(p,q)}+\overline{(r,s)}=\overline{(s\cdot p+q\cdot r,q\cdot s)}\quad\text{ y }\quad\overline{(p,q)}\cdot\overline{(r,s)}=\overline{(p\cdot r,q\cdot s)}\,.$$

coincidentes con la suma y la multiplicación de fracciones. En este contexto, la suma en $\mathbb{Q}$ queda bien definida y verifica S1.-S3. (aquí el neutro de la suma es $0_\mathbb{Q}=\overline{(0,1)}$) y el producto verifica las propiedades P1.-P4 (y el neutro del producto es $1_\mathbb{Q}=\overline{(1,1)}$). Además, si $\overline{(p,q)}\in\mathbb{Q}$ entonces $\overline{(-p,q)}\in\mathbb{Q}$ es tal que $\overline{(p,q)}+\overline{(-p,q)}=0_\mathbb{Q}$ y escribimos $\overline{(-p,q)}=-\overline{(p,q)}$. De esta forma todo elemento de $\mathbb{Q}$ tiene opuesto aditivo y la suma en $\mathbb{Q}$ corresponde a una operación de grupo abeliano. Por otro lado, si $\overline{(p,q)}\neq0_Q$ (es decir, $p\neq0$) entonces $\overline{(q,p)}\in\mathbb{Q}$ es tal que $\overline{(p,q)}\cdot\overline{(q,p)}=1_\mathbb{Q}$ y en este caso escribimos $\overline{(q,p)}=\overline{(p,q)}^{-1}$. Así, vale

P4'. Existencia de inverso: si $x\in\mathbb{Q}$, $x\neq0$, entonces existe $x^{-1}\in\mathbb{Q}$ tal que $x\cdot x^{-1}=1_\mathbb{Q}$.

Es decir, todo elemento no nulo admite un inverso multiplicativo. De esta forma, $\mathbb{Q}$ verifica S1.-S4. y P1.-P3, P4' y D. En este caso, decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo (un gigantesco □). Más adelante vamos a re-escribir la definición de cuerpo.

Además, podemos definir un orden en $\mathbb{Q}$ de la siguiente forma. Sea $P = \{\overline{(p,q)} \ : \ p, q \in \mathbb{N}, p \neq 0, q \neq 0\}$; en este caso definimos

$$\overline{(p,q)} \leq \overline{(r,s)} \Leftrightarrow \quad \overline{(p,q)} = \overline{(r,s)} \quad \text{ó} \quad \overline{(p,q)} \neq \overline{(r,s)} \quad \text{y} \quad \overline{(r,s)} - \overline{(p,q)} \in P\,.$$

En este caso, se verifica que la relación anterior es un orden que resulta compatible con la estructura algebraica de $\mathbb{Q}$: si $x \leq z$ en $\mathbb{Q}$ entonces $x + w \leq z + w$ para todo $w \in \mathbb{Q}$; por otro lado, si $w \in P$ entonces $x \cdot w \leq z \cdot w$. También se verifica la tricotomía: si $x \in \mathbb{Q}$ entonces $x > 0$ o $x = 0$ o $x < 0$. En este caso decimos que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado.

Finalmente, si consideramos $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\gamma(p) = \overline{(p,1)} \in \mathbb{Q}$ entonces γ es una función inyectiva que respeta toda la estructura de $\mathbb{Z}$ que hemos considerado: la suma, el producto y el orden ($\square$). En este sentido es que podemos identificar $p \in \mathbb{Z}$ con $\gamma(p) \in \mathbb{Q}$ y considerar $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, cosa que haremos de aquí en adelante.

En este punto podemos hacer una observación similar a la Obs. 2.9. Por otro lado, cabe mencionar que $\mathbb{Q}$ es un cuerpo dotado de un orden que tiene algunas deficiencias para poder hacer análisis. Por ejemplo, aplicando el teorema fundamental de la aritmética se verifica que no existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$. En este sentido, la función $f(x) = (x^2 - 2)^2$ definida en los $x \in C := \{t \in \mathbb{Q} : 0 \leq t \leq 2\}$ ¡no tiene un mínimo! En lo que sigue vamos a *completar* $\mathbb{Q}$, esencialmente *construyendo* los puntos que le faltan para llegar a ser $\mathbb{R}$. Este proceso de completación puede ser pensado desde muchos puntos de vista distintos. Nosotros vamos a considerar el punto de vista que corresponde a la propiedad de existencia de supremos de conjuntos no vacíos y acotados superiormente. Para formalizar esto, consideramos los siguientes conceptos.

2.2 Conjuntos ordenados

Recordemos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ es un conjunto A en donde hay definida una relación de orden (que es reflexiva, antisimétrica y transitiva). En este caso notamos $a < b$ siempre que $a \leq b$ y $a \neq b$.

Definición 2.12. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $E \subseteq A$.

1. Decimos que E está acotado superiormente si existe $x \in A$ tal que $x \geq e$ para todo $e \in E$; en este caso, decimos que x es una cota superior de E. Definimos el conjunto de cotas superiores

$$CS(E) = \{x \in A \ : \ x \ \text{ es cota superior de } \ E\} \subseteq A\,.$$

   De forma análoga, decimos que E está acotado inferiormente si existe $x \in A$ tal que $x \leq e$ para todo $e \in E$; y en este caso decimos que x es cota inferior de E. Definimos

$$CI(E) = \{x \in A \ : \ x \ \text{ es cota inferior de } \ E\} \subseteq A.$$

   Obs 2.13. Observar que estos conjuntos pueden ser vacíos. Por ejemplo, si tomamos $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ donde $2\mathbb{Z} = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $2\mathbb{Z}$ no está acotado superiormente ni inferiormente. Pero cuando asumimos que el conjunto está acotado superiormente estamos asumiendo que $CS(E) \neq \emptyset$. Análogamente si el conjunto está acotado inferiormente estamos asumiendo que $CI(E) \neq \emptyset$. $\triangle$

2. Si E está acotado superiormente ($CS(E) \neq \emptyset$) decimos que $\alpha \in A$ es el supremo de E, y notamos $\alpha = \sup E$, si

   (a) $\alpha \in CS(E)$;

(b) Si $\beta \in CS(E)$ entonces $\alpha \leq \beta$

Es decir, α es la mínima cota superior de E.

3. Si E está acotado inferiormente ($CI(E) \neq \emptyset$) decimos que $\gamma \in A$ es el ínfimo de E, y notamos $\gamma = \inf E$, si

(a) $\gamma \in CI(E)$;
(b) Si $\beta \in CI(E)$ entonces $\beta \leq \gamma$

Es decir, γ es la máxima cota inferior de E.

△

Ejemplos 2.14. Consideremos a $\mathbb{Q}$ con el orden que hemos construido. En este caso:

1. Si $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x < 0\}$ entonces $CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}$ y $\sup E = 0 \notin E$.
2. Si $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \leq 0\}$ entonces $CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0\}$ y $\sup E = 0 \in E$.
3. Sea $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 \leq x \ , \ x^2 \leq 2\}$ y veamos que este conjunto no tiene supremo en $\mathbb{Q}$ (recordemos que $\nexists\, a \in \mathbb{Q}$ tal que $a^2 = 2$). Por un lado, E está acotado superiormente y más aun,

$$CS(E) = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ , \ x^2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : \ x \geq 0 \ , \ x^2 > 2\}\,.$$

Para verificar lo anterior basta ver que si $e \in E$ ($0 \leq e$ y $e^2 < 2$) y

$$d = e - \frac{e^2 - 2}{e + 2} = \frac{2e + 2}{e + 2} > e \implies d^2 - 2 = \frac{2(e^2 - 2)}{(e + 2)^2} < 0\,.$$

Es decir, $e < d \in E$. Lo anterior indica que si $x \in E$ entonces $x \notin CS(E)$ (completar los detalles para la igualdad de conjuntos de arriba □).

Por otro lado, si $p \in CS(E)$ entonces $p \geq 0$ y $p^2 > 2$. En este caso, $q = p - \dfrac{p^2 - 2}{p + 2} < p$ y vale que

$$q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2} > 0 \implies q \in CS(E)\,.$$

Así, no puede haber una mínima cota superior.

△

Definición 2.15. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado. Decimos que A tiene la propiedad de la mínima cota superior si para todo $E \subseteq A$, tal que $E \neq \emptyset$ y esté acotado superiormente, se verifica que existe $\sup E \in A$. △

Recordemos que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ se dice *totalmente ordenado* si dados $x, y \in A$ se verifica que $x \leq y$ o $y \leq x$.

Proposición 2.16. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado con la propiedad de la mínima cota superior. Si $E \subseteq A$, $E \neq \emptyset$ está acotado inferiormente entonces existe $\alpha = \inf E \in A$. Más aún, $\alpha = \sup CI(E)$.*

Demostración. Notemos que por hipótesis $CI(E) \neq \emptyset$; además, como $E \neq \emptyset$ podemos tomar un elemento $e \in E$: en este caso, si $b \in CI(E)$ entonces $b \leq e$. Así, $e \in CS(CI(E))$ es una cota superior para $CI(E) \subseteq A$. Por hipótesis, existe $\alpha = \sup CI(E)$.

Si $e \in E$ entonces, como $E \subseteq CS(CI(E))$ (ver el párrafo anterior) vemos que $\alpha \leq e$, porque α es el mínimo del conjunto $CS(CI(E))$. Así, $\alpha \in CI(E)$.

Supongamos que $d \in A$ es tal que $\alpha < d$; entonces $d \notin CI(E)$, porque $\alpha \in CS(CI(E))$. Así, si $f \in CI(E)$ entonces $\alpha \geq f$ (porque A está totalmente ordenado). Lo anterior muestra que α es el máximo de $CI(E)$. ■

2.3 Cuerpos

Hemos construido $\mathbb{Q}$ de forma que resulta un cuerpo ordenado. Más adelante vamos a construir $\mathbb{R}$ de forma que también resulte un cuerpo ordenado. En general, hay varios argumentos algebraicos que estamos acostumbrados a usar en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$ que son válidos en cualquier cuerpo. En lo que sigue recordamos las propiedades formales de un cuerpo y deducimos varios de estos argumentos algebraicos formalmente, usando las propiedades de la definición de cuerpo (spoiler alert: se viene un festival de ejercicios para el lector).

Definición 2.17. Un cuerpo es una terna $(F, +, \cdot)$ tal que F es un conjunto, $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias en F (denominadas suma y multiplicación) que satisfacen los siguientes axiomas:

Axiomas para la suma: para todos a, b, $c \in F$

S1. $a + b \in F$ (la operación es cerrada en F o bien definida).

S2. $a + (b + c) = (a + b) + c$.

S3. $a + b = b + a$.

S4. $\exists\, 0 \in F$ tal que $a + 0 = a$.

S5. $\exists - a \in F$ tal que $a + (-a) = 0$.

Axiomas para la multiplicación: para todos a, b, $c \in F$

M1. $a \cdot b \in F$ (la operación es cerrada en F o bien definida).

M2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

M3. $a \cdot b = b \cdot a$.

M4. $\exists 1 \in F$, $1 \neq 0$, tal que $a \cdot 1 = a$.

M5. Si $a \neq 0$, $\exists\, a^{-1} \in F$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$.

Ley distributiva: para todos a, b, $c \in F$

D. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

△

Obs 2.18. Sea F un cuerpo: en adelante *convenimos* en usar las siguientes notaciones:

$$a - b = a + (-b) \;\;,\;\; a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \;\;,\;\; na = a + \ldots + a\,, \qquad n \geq 1 \text{ términos}$$

$$a^0 = 1 \;\;,\;\; a^n = a \cdots a\,, \qquad n \geq 1 \text{ factores}, \qquad \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}\,.$$

△

Es conveniente recordar que hay cuerpos que son bien distintos de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.19. Recordemos que $\mathbb{Z}_5$ (los enteros módulo 5) con la suma y el producto

$$[n] + [m] = [n + m] \quad \text{y} \quad [n] \cdot [m] = [n \cdot m]$$

donde $[n]$ denota la clase módulo 5 para $n \in \mathbb{Z}$, es un cuerpo (finito) (□). △

Las siguientes reglas valen en *todo* cuerpo.

Proposición 2.20. *Sea $(F,+)$ un conjunto dotado de una operación binaria $+$, que satisface los axiomas S1.-S5. Si x, y, $z \in F$ entonces vale que*

1. $x+y=x+z \implies y=z$ *(cancelación).*
2. $x+y=x \implies y=0$ *(unicidad del neutro).*
3. $x+y=0 \implies y=-x$ *(unicidad del opuesto).*
4. $-(-x)=x$.

Demostración. Para verificar 1. usamos los axiomas

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z$$

donde usamos S4 y S3, S5, S2, la hipótesis, y desandamos el camino anterior. Notemos que 2. es un caso particular del ítem 1.: $x+y=x=x+0$ entonces $y=0$. Lo mismo 3: $x+y=0=x+(-x)$ implica que $y=-x$, por el ítem 1. Finalmente, $-x+(-(-x))=0=-x+x$ implica $-(-x)=x$, otra vez por el ítem 1. ■

Proposición 2.21. *Sea $(F,+,\cdot)$ un cuerpo. Si x, y, $z \in F$ entonces vale que*

1. $x\cdot 0=0$.
2. *Si* $x\neq 0$, $y\neq 0$ *entonces* $x\cdot y\neq 0$.
3. *Si* $x\neq 0$, $x\cdot y=x\cdot z \implies y=z$ *(simplificación).*
4. *Si* $x\neq 0$, $x\cdot y=x \implies y=1$ *(unicidad de la unidad).*
5. *Si* $x\cdot y=1 \implies x\neq 0$, $y=x^{-1}$ *(unicidad del inverso).*
6. *Si* $x\neq 0$*:* $(x^{-1})^{-1}=x$.
7. $(-x)\cdot y=x\cdot(-y)=-(x\cdot y)$.
8. $(-x)\cdot(-y)=x\cdot y$.

Demostración. Para ver 1. notemos que $x\cdot 0=x\cdot(0+0)=x\cdot 0+x\cdot 0$; cancelando se tiene que $x\cdot 0=0$. Para ver 2., si $x\neq 0$ pero $x\cdot y=0$ entonces como $x\cdot 0=0$, se tiene que $x\cdot y=x\cdot 0$ y por simplificación, que $y=0$. Los ítems 3 - 8 son ejercicios (□). ■

Definición 2.22. Un cuerpo ordenado es un cuerpo $(F,+,\cdot)$ junto con un subconjunto $P\subseteq F$ (llamado el cono estrictamente positivo) que satisface:

P1. Para todo $a\in F$ vale una y solo una de las siguientes condiciones:

$$a\in P \quad \text{ó} \quad -a\in P \quad \text{ó} \quad a=0\,.$$

P2. Si a, $b\in P$ entonces $a+b\in P$.

P3. Si a, $b\in P$ entonces $a\cdot b\in P$.

En este caso definimos el orden inducido por P: dados a, $b\in F$ entonces

$$a\leq b \quad \text{si y solo si} \quad a=b \quad \text{ó} \quad b-a\in P\,.$$

△

Obs 2.23. Sea F un cuerpo ordenado y sea $P \subseteq F$ el cono estrictamente positivo. Entonces el orden inducido por P es (efectivamente) una relación de orden total. Notemos que $x \leq x$ vale por definición; por otro lado, si $x \leq y$, $y \leq x$ entonces: si $x \neq y$ se tiene que $y - x \in P$ y $x - y = -(y - x) \in P$, que contradice P1 (con $a = y - x$). Así, $x = y$ necesariamente. Finalmente, la transitividad es consecuencia de P2, (□).

Además, el orden es total: sean a, $b \in F$: si $a = b$ entonces $a \leq b$; si $a \neq b$ entonces $b - a \neq 0$ y se debe verificar (por P1.) que: $b - a \in P$ en cuyo caso $a \leq b$ o $-(b - a) = a - b \in P$ en cuyo caso $b \leq a$. △

Ejemplo 2.24. Notemos que $P = \{x \in \mathbb{Q} : \ x > 0\} \subseteq \mathbb{Q}$ verifica las propiedades de la definición anterior. De hecho, el orden inducido por P coincide con el orden usual en $\mathbb{Q}$ que hemos introducido en su construcción. En particular, el orden en $\mathbb{Q}$ es total. △

Proposición 2.25. *Sea F un cuerpo ordenado con cono estrictamente positivo $P \subseteq F$. Entonces*

1. $P = \{x \in F : \ x \neq 0 \ , \ x \geq 0\} = \{x \in F : \ x > 0\}$.
2. *Si $y \geq z$ entonces $x + y \geq x + z$, para $x \in F$.*
3. *Si $x \geq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \geq x \cdot z$.*
4. *Si $x \leq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \leq x \cdot z$.*
5. *Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en particular, $1 \cdot 1 = 1 > 0$).*
6. *Si $0 < x \leq y$ entonces $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.*

Demostración. Notemos que $x \geq 0$ si y solo si $x = 0$ o $x - 0 = x \in P$. Así, si $x \geq 0$ y $x \neq 0$ entonces $x \in P$. Recíprocamente, si $x \in P$ entonces $x \neq 0$ (por P1) y $x - 0 = x \in P$ implica que $x \geq 0$; lo anterior prueba el ítem 1.

Para ver 2. si $y \geq z$ entonces $y = z$ o $y - z \in P$. Si $y = z$ entonces $x + y = x + z$ y vale que $x + y \geq x + z$; si $y - z \in P$ entonces $(x + y) - (x + z) = y - z \in P$ que muestra que $x + y \geq x + z$.

Para ver 3. notemos que si $x = 0$ o $y = z$ entonces la conclusión vale de forma trivial. Así, podemos suponer que $x \in P$ y $y - z \in P$: en este caso por P3. se tiene que $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z \in P$, que muestra que $x \cdot y \geq x \cdot z$.

Los ítems 4, 5 y 6. se verifican con argumentos similares (□). ■

Hay otras formas posibles de definir un orden en un cuerpo, tal que este orden sea compatible con la estructura algebraica. Acá va otra:

Proposición 2.26. *Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo y sea $\leq$ una relación de orden total en F que satisface:*

O1. Si $y > z$ entonces $y + x > z + x$, para todo $x \in F$.

O2. Si $0 < x$, $0 < y$ entonces $0 < x \cdot y$.

Si definimos $P = \{x \in F : \ 0 < x\}$ entonces P resulta un cono estrictamente positivo en F tal que el orden inducido por P (que lo notamos $\leq_P$ para no confundir) coincide con $\leq$.

Demostración. Ejercicio □.

En lo que sigue decimos que un cuerpo $(F, +_F, \cdot_F)$ contiene al cuerpo $(K, +_K, \cdot_K)$ si existe una función $\Phi : K \to F$ que respeta la estructura de K: $\Phi(0_K) = 0_F$, $\Phi(1_K) = 1_F$,

$\Phi(x +_K y) = \Phi(x) +_F \Phi(y)$, $\Phi(x \cdot_K y) = \Phi(x) \cdot_F \Phi(y)$, para todos x, $y \in K$. Notar que una tal función debe ser inyectiva. En efecto: notemos primero que si $x \in K$, $x \neq 0$ entonces

$$1_F = \Phi(x \cdot_K x^{-1}) = \Phi(x) \cdot_F \Phi(x^{-1})$$

que muestra que $\Phi(x) \neq 0_F$ (que $\Phi(x^{-1}) = \Phi(x)^{-1}$ es decir, Φ respeta los inversos). Así, si $\Phi(x) = \Phi(y)$ entonces $\Phi(x - y) = 0_F$ y $x - y = 0_K$, es decir $x = y$. Si además F y K son cuerpos ordenados con conos P_F y P_K pedimos que se verifique: $x \in P_K$ si y solo si $\Phi(x) \in P_F$.

Ahora podemos desarrollar la construcción tan esperada de $\mathbb{R}$, junto con las propiedades derivadas de su construcción.

Teorema 2.27. *Existe un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y tal que el orden en $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.*

Demostración. Vamos a desarrollar la prueba en pasos. Comenzamos definiendo $\mathbb{R}$ como conjunto, a través de una descripción de sus elementos (que son llamados cortaduras).

Paso 1: Una cortadura es cualquier subconjunto $\alpha \subseteq \mathbb{Q}$ con las siguientes propiedades:

C1. $\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \neq \mathbb{Q}$.

C2. Si $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$ entonces $q \in \alpha$.

C3. Si $p \in \alpha$ entonces existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$.

Cabe aclarar que el orden que figura en C2. y C3. es el orden de $\mathbb{Q}$, como lo hemos construido. En adelante seguimos la siguiente convención: $p, q, r \in \mathbb{Q}$ mientras que α, β, γ son cortaduras.

Ya podemos definir $\mathbb{R}$ como conjunto: $\mathbb{R}$ es el conjunto formado por todas las cortaduras. Si $p \in \mathbb{Q}$ entonces definimos $p^* = \{q \in \mathbb{Q} : \ q < p\}$ y es sencillo verificar que p^* es una cortadura (es decir, $p^* \in \mathbb{R}$) $\square$.

En este paso definimos además una relación de orden en $\mathbb{R}$: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha \leq \beta$ si y solo si $\alpha \subseteq \beta$ (acá usamos que las cortaduras son, formalmente, conjuntos). Es claro que lo anterior define un orden.

Veamos que el orden es total: sean α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta \not\leq \alpha$ (es decir, $\beta \not\subseteq \alpha$). En este caso, existe $p \in \beta$ tal que $p \notin \alpha$. Como $\alpha \neq \emptyset$ (por C1.), sea $q \in \alpha$ arbitrario; entonces $p \not\leq q$, porque de otra forma $p \leq q$ y luego $p \in \alpha$ (por C2.). Así, como el orden en $\mathbb{Q}$ es total, vemos que $q \leq p$ que muestra que $q \in \beta$ (por C2.). Lo anterior muestra $q \in \alpha \implies q \in \beta$ y entonces $\alpha \subseteq \beta$; es decir, $\alpha \leq \beta$.

Paso 2. Veamos que $(\mathbb{R}, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$ y tal que E está acotado superiormente. Sea $\beta \in \mathbb{R}$ una cota superior de E, es decir tal que $\alpha \leq \beta$ para todo $\alpha \in E$. Definimos

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists \alpha \in E \ , \ p \in \alpha\} .$$

Veamos que γ es una cortadura:

C1: $\gamma \neq \emptyset$, porque si $\alpha \in E$ ($E \neq \emptyset$) entonces $\emptyset \neq \alpha \subseteq \gamma$. Además, como $\beta \in \mathbb{R}$, existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r \notin \beta$; notemos que si $\alpha \in E$ entonces $\alpha \subseteq \beta$ y luego $\gamma \subseteq \beta$ (por Álgebra I, $\square$). En particular, $r \notin \gamma$ y $\gamma \neq \mathbb{Q}$.

C2: Sea $p \in \gamma$ y $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$: por definición de γ, existe $\alpha \in E$ tal que $p \in \alpha$; pero entonces por C2 para α vemos que $q \in \alpha$. Finalmente, como $\alpha \subseteq \gamma$, $q \in \gamma$.

C3: Sea $p \in \gamma$; por definición de γ, existe $\alpha \in E$ tal que $p \in \alpha$; pero entonces, por C3. para α, existe $r \in \alpha$ tal que $p < r$. Otra vez, podemos ver que $r \in \gamma$ y estamos.

Claramente, $\alpha \leq \gamma$, para todo $\alpha \in E$ de forma que $\gamma \in \mathbb{R}$ es una cota superior para E. Veamos que es la mínima cota superior: si $\delta \in \mathbb{R}$ es tal que $\alpha \leq \delta$ (es decir, $\alpha \subseteq \delta$), para todo $\alpha \in E$, entonces (por álgebra I)

$$\gamma = \bigcup_{\alpha \in E} \alpha \subseteq \delta \implies \gamma \leq \delta \,.$$

Así, $\gamma = \sup E$.

Paso 3. Definimos la suma en $\mathbb{R}$: dados α, $\beta \in \mathbb{R}$ definimos

$$\alpha + \beta = \{p + q : \ p \in \alpha \ , \ q \in \beta\} \,.$$

Notemos que la definición anterior está basada en la suma en $\mathbb{Q}$. Veamos que valen las propiedades S1.-S5. de la Definición 2.17, para la suma así definida.

S1. Veamos que $\alpha + \beta$ es una cortadura: es claro que $\emptyset \neq \alpha + \beta \subseteq \mathbb{Q}$ (porque α y β son no vacíos). Sea r', $s' \in \mathbb{Q}$, $r' \notin \alpha$ y $s' \notin \beta$. Entonces si $r \in \alpha$ y $s \in \beta$ son arbitrarios (como vimos antes) $r < r'$ y $s < s'$: luego $r + s < r' + s'$. Lo anterior dice que $r' + s' \notin \alpha + \beta$ (según la definición de suma de arriba) y vale C1. Para ver C2. sea $p \in \alpha + \beta$ y sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $q \leq p$. Por definición, existen $r \in \alpha$, $s \in \beta$ tales que $q \leq p = r + s$. Como $q - p \leq 0$ entonces $r + (q - p) \leq r$, que muestra que $r + (q - p) \in \alpha$ y entonces $r + (q - p) + s = p + (q - p) = q \in \alpha + \beta$. Finalmente, vemos C3: Sea $p \in \alpha + \beta$. Por definición, existen $r \in \alpha$, $s \in \beta$ tales que $p = r + s$. Por C3 para α y β, existen $r' \in \alpha$, $s' \in \beta$ tales que $r < r'$, $s < s'$ y entonces $p = r + s < r' + s' \in \alpha + \beta$ (por definición).

S2. Es una consecuencia de la asociatividad de la suma en $\mathbb{Q}$: si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ entonces es sencillo verificar ($\square$: se usa que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$ y que $\beta + \gamma \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) + \gamma &= \{(r + s) + t : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta \,, \, t \in \gamma\} = \{r + (s + t) : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta \,, \, t \in \gamma\} \\ &= \alpha + (\beta + \gamma) \,. \end{aligned}$$

S3. es una consecuencia de la conmutatividad de la suma en $\mathbb{Q}$: en efecto,

$$\alpha + \beta = \{r + s : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta\} = \{s + r : \ r \in \alpha \,, \, s \in \beta\} = \beta + \alpha$$

S4. Veamos que $\alpha + 0^* = \alpha$. En efecto, si $r \in \alpha$, $s \in 0^*$ entonces r, $s \in \mathbb{Q}$ y $s < 0$; entonces $r + s < r$ que muestra que $r + s \in \alpha$, por C2. Así, $\alpha + 0^* \subseteq \alpha$. Por otro lado, dado $r \in \alpha$ sea $q \in \alpha$ tal que $r < q$ (acá usamos C3.) Entonces $s = r - q < 0$ y $r = q + (r - q) \in \alpha + 0^*$, que muestra que $\alpha \subseteq \alpha + 0^*$. Así, la doble inclusión muestra la igualdad de conjuntos $\alpha + 0^* = \alpha$.

S5. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ fijo: definimos

$$\beta = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists\, r \in \mathbb{Q} \,, \, r > 0 \ , \ -p - r = -(p + r) \notin \alpha\} \,.$$

Veamos que $\beta \in \mathbb{R}$ (es una cortadura) y $\alpha + \beta = 0^*$. Sea $s \notin \alpha$ (por C1. para α) y sea $p = -s - 1$: entonces $-p - 1 = s \notin \alpha$. Así, $p \in \beta$ y $\beta \neq \emptyset$. Si $q \in \alpha$, notemos que $-q \notin \beta$: en efecto, si $r > 0$ entonces $-(-q) - r = q - r < q \in \alpha$, de forma que $-(-q) - r \in \alpha$, para $r > 0$. Lo anterior muestra que $\beta \neq \mathbb{Q}$ y vale C1. para β. Sea $p \in \beta$, sea $q \in \mathbb{Q}$, $q \leq p$ y sea $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$; como $-p \leq -q$ entonces $-p - r \leq -q - r$ que muestra que $-q - r \notin \alpha$ (de otra forma, $-q - r \in \alpha$, $-p - r \leq -q - r$ implican $-p - r \in \alpha$ en contra de la hipótesis). Así, vale C2. para β. Finalmente, si $p \in \beta$, sea $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$ tal que $-p - r \notin \alpha$. Entonces $\mathbb{Q} \ni p + r/2 > p$ es tal que existe $r/2 > 0$ y $-(p + r/2) - r/2 = -p - r \notin \alpha$; lo anterior muestra que $p + r/2 \in \beta$ y vale C3 para β: así, $\beta \in \mathbb{R}$.

Sean $r \in \alpha$, $s \in \beta$ arbitrarios; entonces existe $t \in \mathbb{Q}$, $t > 0$, tal que $-s - t \notin \alpha$. Como $-s - t < -s$ entonces $-s \notin \alpha$ de forma que $r < -s$ (de otra forma, $-s \leq r$ que fuerza a

que $-s \in \alpha$ por C2.). Así, $r + s < 0$ y vale que $\alpha + \beta \subseteq 0^*$. Por otro lado, sea $v \in 0^*$: entonces $w = -v/2 > 0$, $w \in \mathbb{Q}$. Usando C1. para α, existen $t \in \alpha$ y $u \in \mathbb{Q}$, $u \notin \alpha$: entonces $t < u$ y existen k_0, $k_1 \in \mathbb{Z}$ tales que $k_0 \cdot w < t < u < k_1 \cdot w$. Sea

$$n = \max\{k \in \mathbb{Z} : \ k_0 \leq k \leq k_1 \, , \, k \cdot w \in \alpha\}$$

notemos que $k_0 \cdot w \in \alpha$ y $k_1 \cdot w \notin \alpha$ de forma que $k_0 \leq n < k_1$, $n \cdot w \in \alpha$ y $(n+1) \cdot w \notin \alpha$. Sea $p = -(n+2) \cdot w$: como $-p - w = (n+1) \cdot w \notin \alpha$, vemos que $p \in \beta$; además, $v = n \cdot w + p \in \alpha + \beta$. Como $v \in 0^*$ era arbitrario, vemos que $0^* \subseteq \alpha + \beta$. Así, vale la doble inclusión $\alpha + \beta = 0^*$. En adelante notamos $\beta = -\alpha$.

Paso 4. Veamos que el orden total en $\mathbb{R}$ verifica la propiedad O1. de la Proposición 2.26. En efecto, si α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $\beta < \gamma$ i.e. $\beta \subseteq \gamma$ y $\beta \neq \gamma$ (que también notamos como $\beta \subsetneq \gamma$) entonces

$$\alpha + \beta = \{r + s : \ r \in \alpha \, , \, s \in \beta\} \subseteq \{r + s : \ r \in \alpha \, , \, s \in \gamma\} = \alpha + \gamma \, .$$

Si suponemos que $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$, entonces usando (los hechos ya probados) que existe $-\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha + -\alpha = 0^*$, que la suma es asociativa y que 0^* es el neutro para la suma, podemos concluir que $\beta = \gamma$, en contra de nuestra hipótesis. Así, $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Por otro lado, si $\alpha > 0^*$ entonces $-\alpha < 0$: en efecto, notemos que por hipótesis, $0^* \subsetneq \alpha$; si $r \in -\alpha$ entonces existe $s > 0$ tal que $-r - s \notin \alpha$; en particular, $0 \leq -r - s$ y $r < r + s \leq 0$ que muestra que $-\alpha \leq 0$. Por otro lado, si $-\alpha = 0$ entonces usando las propiedades S1.-S5. ya probadas, deducimos que $\alpha = 0$, en contra de la hipótesis. Así, $-\alpha < 0$. De forma análoga se verifica la recíproca: $-\alpha < 0$ implica $\alpha > 0$ ($\square$).

Paso 5. Comenzamos definiendo el producto en $\mathbb{R}$ para el caso de α, $\beta > 0^*$. En este caso, existen $r \in \alpha$, $r > 0$ y $s \in \beta$, $s > 0$ (en efecto, existe $p \in \alpha$ tal que $p \notin 0^*$ implica que $p \geq 0$. Luego, por C3. para α, existe $r \in \alpha$, $r > p \geq 0$; y lo mismo para probar que existe s). Definimos

$$\alpha \cdot \beta = \{p \in \mathbb{Q} : \ \exists r \in \alpha \, , \, r > 0 \, , \, \exists s \in \beta \, , \, s > 0 \, , \, p \leq r \cdot s\} \, .$$

En este caso se verifica que $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{R}$ es decir, es una cortadura ($\square$). Notar que por construcción $\alpha \cdot \beta > 0^*$. Además, si $\alpha \geq 0^*$ y $\beta \geq 0^*$ y alguno es 0^*, definimos $\alpha \cdot \beta = 0^*$.

Con estas definiciones se verifican las propiedades en M1.-M5. y D cuando α, $\beta \geq 0^*$ (aquí consideramos 1^* como la unidad) (un gran $\square$). Finalmente completamos la definición del producto en $\mathbb{R}$ según los siguientes casos:

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} -\alpha \cdot -\beta & \alpha \leq 0^*, \, \beta \leq 0^*; \\ -(-\alpha \cdot \beta) & \alpha \leq 0^*, \, \beta \geq 0^*; \\ -(\alpha \cdot -\beta) & \alpha \geq 0^*, \, \beta \leq 0^*. \end{cases}$$

Notemos que los productos a la derecha tienen factores mayores o iguales que cero (para los cuales el producto ya ha sido definido). Usando que valen las propiedades M1.-M5. cuando los factores α, $\beta \geq 0^*$ (ejercicio previo) se puede verificar que las propiedades M1.-M5. valen en general (para factores α, $\beta \in \mathbb{R}$): el lector intuitivo adivinará: ($\square$). Por ejemplo, para verificar la distributividad

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

hay que considerar varios casos, según los signos de los factores reales involucrados. Por ejemplo, si $\alpha \geq 0^*$, $\beta \leq 0^*$ y $\gamma \geq 0^*$ pueden pasar dos sub-casos: $\beta + \gamma > 0^*$ o $\beta + \gamma \leq 0^*$. Si suponemos además que $\beta + \gamma > 0^*$ entonces, como $-\beta \geq 0^*$

$$\gamma = (\beta + \gamma) + -\beta \implies \alpha \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot -\beta$$

donde hemos usado la distributividad cuando todos los factores son mayores o iguales que cero (que asumimos que ya hemos probado en ejercicio anterior). Además, recordemos que por definición

$$\alpha \cdot \beta = -(\alpha \cdot -\beta) \implies \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot (\beta + \gamma) + \alpha \cdot -\beta + -(\alpha \cdot -\beta) = \alpha \cdot (\beta + \gamma)$$

donde hemos cancelado dos términos (usando la propiedad S5. de la Definición 2.17 que ya hemos probado). Dejamos los detalles de considerar los casos restantes y sus verificaciones al lector comprometido. Además, el orden y el producto (ya completamente definidos) satisfacen la propiedad O2. de la Proposición 2.26 (□).

Paso 6. Los pasos anteriores muestran que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un cuerpo dotado de un orden compatible (inducido por un cono estrictamente positivo). Así, $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado. Además, como conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ tiene la propiedad de la mínima cota superior. Nos resta ver que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo ordenado. Definimos $\Phi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(r) = r^* \in \mathbb{R}$. Veamos que Φ respeta la estructura de $\mathbb{Q}$ y el cono estrictamente positivo de $\mathbb{Q}$. Notemos que hemos probado que $0^* = \Phi(0)$ y $1^* = \Phi(1)$ son el neutro y la unidad en el cuerpo $\mathbb{R}$. Veamos que

$$\Phi(r + s) = \Phi(r) + \Phi(s)$$

es decir, $(r + s)^* = r^* + s^*$. En efecto, si $p \in r^* + s^*$ entonces existen $u, v \in \mathbb{Q}$, $u < r$, $v < s$ tales que $p = u + v < r + s$, de forma que $p \in (r + s)^*$. Por otro lado, si $p < r + s$ sea $t \in \mathbb{Q}$ tal que $2t = (r + s) - p > 0$. Sea $r' = r - t \in r^*$, $s' = s - t \in s^*$ y notemos que $p = (r + s) - 2t = r' + s' \in r^* + s^*$. Los hechos anteriores muestran (a través de la doble inclusión de conjuntos) que $r^* + s^* = (r + s)^* \in \mathbb{R}$.

De forma similar se prueba que $\Phi(r \cdot s) = \Phi(r) \cdot \Phi(s)$, es decir $(r \cdot s)^* = r^* \cdot s^*$ (□).

Finalmente, veamos que si $r \in \mathbb{Q}$ es tal que $r > 0$ entonces $r^* > 0^*$: en efecto, notemos que si $p \in 0^*$ entonces $p < 0 < r$ de forma que $p \in r^*$ y $0^* \leq r^*$. Por otro lado, $0 < r/2 \in r^*$, mientras que $r/2 \notin 0^*$, que muestra que $r^* \neq 0^*$. De forma análoga se prueba que si $r^* > 0^*$ (en $\mathbb{R}$) entonces $r > 0$ (en $\mathbb{Q}$). Lo anterior muestra también que Φ es inyectiva y entonces podemos identificar $\mathbb{Q}$ con $\Phi(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}$ y pensar, como hacemos de aquí en adelante, que $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. ■

Como se menciona en la construcción anterior de $\mathbb{R}$, se identifica a $\mathbb{Q}$ con $\Phi(\mathbb{Q})$ para considerar $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$: las cortaduras *racionales* de $\mathbb{R}$. Sin embargo, hay otro tipo de cortaduras y por lo tanto $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$ será el conjunto de cortaduras *irracionales* de $\mathbb{R}$. En particular, el conjunto

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$$

es una cortadura irracional. O sea, no existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $E = r^*$. (□).

Vamos a verificar otras propiedades fundamentales de $\mathbb{R}$.

Teorema 2.28. *Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo ordenado que hemos construido. Entonces*

1. *$\mathbb{R}$ es arquimediano: si $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot x > y$.*
2. *$\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$: si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ tal que $x < p < y$.*

Demostración. Para ver 1. sea

$$A = \{n \cdot x : \quad n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R} \ , \ A \neq \emptyset \, ,$$

donde $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Si suponemos que $\nexists n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot x > y$ entonces, $n \cdot x \leq y$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Es decir, $y \in \mathbb{R}$ es una cota superior para A en $\mathbb{R}$ y luego existe

$\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$. Como $x > 0$ entonces $\alpha - x < \alpha$, de forma que $\alpha - x$ no es cota superior de A; como $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tal que $\alpha - x < n_0 \cdot x$ y luego $\alpha < (n_0 + 1) \cdot x$ con $n_0 + 1 \in \mathbb{N}^*$. Lo anterior contradice que $\alpha = \sup A$ (porque α no sería cota superior de A). Así, debe existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $y < n \cdot x$.

Para ver 2., notemos que $y - x > 0$; por 1. debe existir $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \cdot (y - x) > 1$ de forma que $n \cdot y > n \cdot x + 1$. Aplicando 1. a los pares $n \cdot x, 1 \in \mathbb{R}$ y $-n \cdot x, 1 \in \mathbb{R}$, con $1 > 0$, vemos que existen $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^*$ tales que $m_1 \cdot 1 = m_1 > n \cdot x$ y $m_2 > -n \cdot x$. Entonces $-m_2 < n \cdot x < m_1$. Sea

$$m = \min\{k \in \mathbb{Z} : \ -m_2 \leq k \leq m_1 \ , \ n \cdot x < k\} \, .$$

Entonces $-m_2 < m \leq m_1$ y $m - 1 \leq n \cdot x < m$ que muestra que

$$n \cdot x < m \leq n \cdot x + 1 < n \cdot y \implies x < \frac{m}{n} < y \, .$$

■

2.4 La recta real extendida

El conjunto de los reales extendidos, notado $\overline{\mathbb{R}}$, está dado por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donde $\pm\infty$ denotan dos elementos (nuevos) que no están en $\mathbb{R}$. En $\overline{\mathbb{R}}$ consideramos el orden: dados $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \leq y$ si y solo si: $x, y \in \mathbb{R}$ y $x \leq y$ en el sentido usual o $x = -\infty$ o $y = \infty$. En particular, si $x \in \mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ entonces $-\infty < x < +\infty$. Además, definimos: si $x \in \mathbb{R} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$:

$$x - (-\infty) = +\infty \, , \, x + (-\infty) = -\infty \, , \, x - (+\infty) = -\infty \, , \, x + (+\infty) = +\infty$$

$$-\infty + (-\infty) = -\infty \, , \, +\infty + (+\infty) = +\infty \, , \, \frac{x}{\pm\infty} = 0 \, .$$

Notemos que expresiones del tipo $+\infty - (+\infty)$ o $+\infty + (-\infty)$ no fueron definidas. De forma similar,

$$\text{si} \ \ x > 0 \ : \ x \cdot +\infty = +\infty \, , \, x \cdot -\infty = -\infty$$

mientras que si $x < 0$ entonces $x \cdot +\infty = -\infty$, $x \cdot -\infty = +\infty$. Notemos que expresiones del tipo $0 \cdot \pm\infty$ no han sido definidas. Así, la suma y el producto en $\overline{\mathbb{R}}$ están *parcialmente* definidas.

Obs 2.29. Sea $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$. Entonces existe $\sup E \in \overline{\mathbb{R}}$. En efecto, notemos que $+\infty \in CS(E)$, de forma que $CS(E) \neq \emptyset$. Consideramos los siguientes casos:

1. Si existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in CS(E)$ (E está acotado superiormente en $\mathbb{R}$) entonces vale alguno de los siguientes sub-casos:
   (a) Si $F = E \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$: en este caso existe $\alpha = \sup F$ y vale que $\alpha = \sup E$ ($\square$).
   (b) $E = \{-\infty\}$ y en este caso $\sup E = -\infty$.
2. Si E no está acotado superiormente en $\mathbb{R}$ (es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $e \in E$ tal que $x < e$) entonces $CS(E) = \{+\infty\}$ y $\sup E = +\infty$ en este caso.

△

2.5 Complejos

En esta sección describimos brevemente la construcción de $\mathbb{C}$ a partir de $\mathbb{R}$. Además, incluimos algunos aspectos geométricos (y métricos) de $\mathbb{C}$.

Formalmente, definimos $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como conjunto. En $\mathbb{C}$ podemos definir las operaciones

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in \mathbb{C} \quad \text{y} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \in \mathbb{C}\,.$$

Teorema 2.30. *Con las definiciones anteriores para la suma y la multiplicación $\mathbb{C}$ resulta un cuerpo con elemento neutro para la suma dado por $(0, 0)$ y elemento neutro para el producto dado por $(1, 0)$. Más aún, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $\Phi(a) = (a, 0)$ es un morfismo de cuerpos que muestra que $\mathbb{C}$ incluye a $\mathbb{R}$ como cuerpo.*

Demostración. Un muuuy largo ejercicio que han resuelto en su mayoría en Álgebra I. □

En general, identificamos $\mathbb{R}$ con $\Phi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{C}$. De esta forma, si $z = (c, d) \in \mathbb{C}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces notamos $a \cdot z = \Phi(a) \cdot z = (ac, ad) \in \mathbb{C}$ y $a + z = \Phi(a) + z = (a + c, d) \in \mathbb{C}$.

También es usual notar $i = (0, 1) \in \mathbb{C}$. Notemos que por las definiciones que hemos mencionado

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1\,.$$

Además, $z = (a, b) = a + b \cdot i$ para todo $z = (a, b) \in \mathbb{C}$. En este caso, notamos $\Re(z) = a \in \mathbb{R}$ y $\Im(z) = b \in \mathbb{R}$ que son las partes reales e imaginarias de $z \in \mathbb{C}$.

Dado $z = a + b \cdot i$ definimos el conjugado de z, notado $\overline{z}$, dado por $\overline{z} = a - b \cdot i = (a, -b) \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.31. *Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{w} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2\,i\,\Im(z)$.

Demostración. Ejercicio □.

Notemos que se verifica

$$z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0\,.$$

Definimos el módulo de z, notado $|z|$, como la raíz cuadrada no negativa $|z| = (z \cdot \overline{z})^{1/2} \geq 0$. Para finalizar incluimos una serie de propiedades de $\mathbb{C}$ en el siguiente resultado.

Teorema 2.32. *Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces*

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ *si y solo si* $z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
4. $|\Re(z)| \leq |z|$.
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Demostración. Ejercicio □.

Notemos que si $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ entonces podemos considerar $|a|$ en el sentido usual en $\mathbb{R}$ o bien podemos considerar $|a|$ en el sentido del módulo de un número complejo. Pero es sencillo verificar que estas dos expresiones coinciden.

Notemos que no es posible definir un orden en $\mathbb{C}$ que lo convierta en un cuerpo ordenado (□). Así, siempre que escribamos un signo de desigualdad estará implícito (o deberemos verificar) que los números involucrados son reales.

2.6 Conjuntos numerables

En esta última sección del capítulo mencionamos algunos hechos relacionados con los conjuntos numerables. Para hacer esto, primero recordamos brevemente (e informalmente) el concepto de función entre conjuntos.

Dados dos conjuntos A, B, una función $f : A \to B$ es una asignación que a cada elemento $a \in A$ le asigna un único elemento $f(a) \in B$.

1. En este caso, A es denominado el dominio de f y B es denominado el co-dominio de f.
2. Si $E \subseteq A$ consideramos $f(E) = \{f(e) : \ e \in E\} \subseteq B$, la imagen directa de E por f.
3. Si $F \subseteq B$ consideramos $f^{-1}(F) = \{a \in A : \ f(a) \in F\} \subseteq A$, la preimagen de F por f.
4. Recordemos que f es *suryectiva* si $f(A) = B$ y que f es *inyectiva* si siempre que $a, a' \in A$ son tales que $f(a) = f(a')$ entonces $a = a'$.
5. Finalmente, f es biyectiva si es inyectiva y suryectiva a la vez. En ese caso, queda definida la función inversa de f, notada $f^{-1} : B \to A$ tal que las composiciones

$$f \circ f^{-1} = I_B \quad \text{y} \quad f^{-1} \circ f = I_A \,,$$

donde $I_A : A \to A$ y $I_B : B \to B$ denotan las funciones identidad de A y B respectivamente.

Definición 2.33. Decimos que los conjuntos A y B son coordinables (o que tienen el mismo cardinal), y notamos $A \sim B$, si existe una función biyectiva $f : A \to B$. △

La definición de que dos conjuntos sean coordinables modela la idea de que los conjuntos tienen la misma cantidad de elementos. Sin embargo, esta idea es más sutil de lo que parece a primera vista.

Obs 2.34. Sea U un conjunto y consideremos $P(U) = \{A : \ A \subseteq U\}$ el conjunto de partes de U. Entonces la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $P(U)$. Notemos que si $A \in P(U)$ entonces $I_A : A \to A$ es biyección ($\sim$ es reflexiva). Si $A \sim B$ existe $f : A \to B$ biyección; pero $f^{-1} : B \to A$ también es biyección, ejercicio de Álgebra I ($\sim$ es simétrica) y la transitividad de $\sim$ es consecuencia de que la composición de biyecciones es biyección ($\square$). △

En lo que sigue notamos $\mathbb{I}_n = \{1, \ldots, n\}$ al conjunto de los números naturales entre 1 y n, para $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definición 2.35. Sea A un conjunto. Decimos que

1. A es finito si $A = \emptyset$ o existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.
2. A es infinito si A no es finito.
3. A es numerable si $A \sim \mathbb{N}^*$.
4. A es a lo sumo numerable si A es finito o A es numerable.
5. A es no numerable si A no es a lo sumo numerable.

△

Si $A \neq \emptyset$ es finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$ ($\square$ ¡difícil!) y en este caso decimos que A *tiene* n *elementos*, y escribimos $\#(A) = n$ o $|A| = n$. De forma similar, se puede probar que si A y B son conjuntos finitos y no vacíos entonces $A \sim B$ si y solo si A y B tienen la misma cantidad de elementos ($\square$).

Sin embargo, en el caso de conjuntos infinitos, se verifican ciertos hechos que pueden contradecir la noción intuitiva de *cantidad elementos*.

Ejemplos 2.36. Consideremos los siguientes hechos:

1. Sea $k \in \mathbb{N}^*$ y consideramos $A_k = \{n \in \mathbb{N}^* : \ n \geq k\} \subseteq \mathbb{N}^*$. En general, si $k > 1$ entonces $A_k \subseteq \mathbb{N}^*$ es un subconjunto propio (es decir, $A_k \neq \mathbb{N}^*$). Sin embargo, $A_k \sim \mathbb{N}^*$: de hecho la función $f_k : \mathbb{N}^* \to A_k$ dada por $f_k(m) = m + (k-1)$, $m \in \mathbb{N}^*$, es una biyección.

2. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ es un subconjunto propio, y de hecho $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ es infinito: sin embargo, también $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Para verificar esto, consideramos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ tal que

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ es par ;} \\ -(n+1)/2 & n \text{ es impar .} \end{cases}$$

   En este caso se puede verificar que f es una biyección ($\square$).

3. Notemos que no todo conjunto infinito es numerable: consideramos

$$A = \{f : \mathbb{N}^* \to \{0,1\} : \ f \text{ es función } \}.$$

   A es un conjunto infinito; más aún, no hay ninguna suryección $h : \mathbb{N}^* \to A$. En efecto, sea $h : \mathbb{N}^* \to A$ una función arbitraria. Vamos a construir un elemento de A que no está en $h(\mathbb{N}^*)$: para ello notamos $h(n) = f_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Así, $f_n : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ es una función. Definimos la función $f : \mathbb{N}^* \to \{0,1\}$ como sigue: dado $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } f_n(n) = 0; \\ 0 & \text{si } f_n(n) = 1. \end{cases}$$

   La asignación anterior determina a la función $f \in A$; además, si $n \in \mathbb{N}^*$ entonces $f \neq f_n = h(n)$: en efecto, $f(n) \neq f_n(n)$ por construcción (como los valores de las funciones difieren en al menos un punto de su dominio, las funciones no pueden ser iguales). Así, $f \notin h(\mathbb{N}^*)$ y h no es suryectiva.

   Lo anterior muestra que A es no numerable (el razonamiento anterior es conocido como el *argumento diagonal de Cantor*). $\triangle$

El siguiente resultado indica que los conjuntos numerables son los conjuntos infinitos más chicos que podemos considerar.

Proposición 2.37. *Sea A un conjunto infinito. Entonces existe $B \subseteq A$ tal que B es numerable.*

Demostración. Por hipótesis, $A \neq \emptyset$ (de otra forma, sería finito) y existe $b_1 \in A$. Consideremos $A \setminus \{b_1\}$: este conjunto no es vacío (de otra forma, $A = \{b_1\} \sim \mathbb{I}_1$ es finito) y podemos considerar $b_2 \in A \setminus \{b_1\}$; en particular, $b_2 \neq b_1$. Ahora notamos que $A \setminus \{b_1, b_2\} \neq \emptyset$ y podemos elegir b_3 y continuar. Notemos que una vez elegidos $b_1, \ldots, b_n$ entonces $A \setminus \{b_1, \ldots, b_n\} \neq \emptyset$ y podemos elegir b_{n+1} de forma que $b_{n+1} \neq b_j$, para $1 \leq j \leq n$. Este proceso se puede continuar: de esta forma, podemos definir $f : \mathbb{N}^* \to A$ dada por $f(n) = b_n \in A$, para $n \in \mathbb{N}^*$ (la formalización de este procedimiento requiere considerar

el principio de recursión en $\mathbb{N}^*$, que es formalmente similar al principio de inducción, que no consideramos aquí). Notemos que por construcción $f(n+1) = b_{n+1} \neq f(j)$, para todo $1 \leq j \leq n$, que muestra que f es una inyección. Finalmente, definimos $B = f(\mathbb{N}^*) \subseteq A$: entonces $\mathbb{N}^* \sim B$ (usando que $\tilde{f} : \mathbb{N}^* \to B$ tal que $\tilde{f}(n) = f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ es una biyección), que muestra que B es un subconjunto numerable de A. ■

Proposición 2.38. *Todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.*

Demostración. Sea $f : \mathbb{N}^* \to A$ una biyección (que existe, porque A es numerable). Sea $B \subseteq A$. Si B es finito, entonces B es a lo sumo numerable y listo. Si B es infinito, sea

$$M = \{n \in \mathbb{N}^* : \ f(n) \in B\} = f^{-1}(B) \subseteq \mathbb{N}^* .$$

Notemos que $M \neq \emptyset$ es tal que $\tilde{f} : M \to B$ dada por $\tilde{f}(m) = f(m)$, $m \in M$, es una biyección; en particular, $M \sim B$ que muestra que M es infinito. Sea $1 \leq n_1 \in M$ el primer elemento de M (aquí usamos las propiedades de $\mathbb{N}$). Como $M \setminus \{n_1\} \neq \emptyset$ consideramos n_2 el primer elemento de $M \setminus \{n_1\}$; notemos que $n_2 > n_1 \geq 1$ y en particular $n_2 \geq 2$; continuando con este proceso podemos definir $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ tal que $n_m \geq m$: en este caso $M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\} \neq \emptyset$ (de otra forma M sería finito) y podemos considerar n_{m+1} el primer elemento de $M \setminus \{n_1, \ldots, n_m\} \subseteq \mathbb{N}^*$ y luego $n_{m+1} > n_m \geq m$ de forma que $n_{m+1} \geq m + 1$.

Sea $h : \mathbb{N}^* \to B$ dada por $h(m) = f(n_m) \in B$, para $m \geq 1$. Notemos que h es una función inyectiva: si $m \neq m'$ entonces $n_m \neq n_{m'}$ y luego, como f es inyectiva, $f(n_m) \neq f(n_{m'})$. Además, h es suryectiva: si $b \in B$ entonces existe $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $f(m) = b$ (porque f es suryectiva) y entonces se debe verificar que $b = h(k)$ para algún $1 \leq k \leq m$ (□). En particular, $B \sim \mathbb{N}^*$ y B es numerable. ■

Recordemos que dados conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ podemos construir el producto cartesiano

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, \ldots, a_n) : \ a_j \in A_j \ , \ 1 \leq j \leq n\} .$$

Proposición 2.39. *Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Entonces el producto cartesiano $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.*

Demostración. Notemos que A es conjunto infinito (es sencillo coordinar un subconjunto de A con $\mathbb{N}^*$). Para ver que A es numerable usamos el resultado anterior: en este caso, basta mostrar que A es (coordinable con) un subconjunto de un conjunto numerable. Notemos primero que A es coordinable con $(\mathbb{N}^*)^n = \mathbb{N}^* \times \ldots \times \mathbb{N}^*$ (n factores). En efecto, por hipótesis existen biyecciones $f_j : A_j \to \mathbb{N}^*$, para $1 \leq j \leq n$: en este caso podemos definir $f : A \to (\mathbb{N}^*)^n$ dada por $f(a_1, \ldots, a_n) = (f_1(a_1), \ \ldots, \ f_n(a_n)) \in (\mathbb{N}^*)^n$, para $(a_1, \ldots, a_n) \in A$. Es sencillo verificar que f es biyección (□), y entonces $A \sim (\mathbb{N}^*)^n$. Ahora veamos que $(\mathbb{N}^*)^n$ es coordinable con un subconjunto de $\mathbb{N}$. Para eso, sean $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{N}^*$ números primos distintos dos a dos ($p_i \neq p_j$ si $i \neq j$) y definamos la función $h : (\mathbb{N}^*)^n \to \mathbb{N}^*$ dada por $h(r_1, \ldots, r_n) = p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n} \in \mathbb{N}^*$, para $(r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$. Por el teorema fundamental de la Aritmética concluimos que h ¡es inyectiva! (□). Luego, si $B = h((\mathbb{N}^*)^n) \subseteq \mathbb{N}^*$ vemos que $h : (\mathbb{N}^*)^n \to B$ es una biyección. En resumen, $A \sim (\mathbb{N}^*)^n \sim B$. Como B es un subconjunto infinito de un conjunto numerable, el resultado anterior muestra que $B \sim \mathbb{N}^*$. Como $\sim$ es una relación transitiva, $A \sim \mathbb{N}^*$ ■

Corolario 2.40. $\mathbb{Q}$ *es numerable.*

Demostración. Consideramos $q \in \mathbb{Q}$, $q > 0$: entonces, simplificando factores primos comunes, podemos escribir $q = \dfrac{a}{b}$ tales que a, $b \in \mathbb{N}^*$ son co-primos, es decir $(a, b) = 1$: en

este caso, la escritura (que se llama fracción reducida) es única (□). De forma análoga, si $q < 0$ entonces podemos escribir $q = \frac{a}{b}$ tales que $-a$, $b \in \mathbb{N}^*$ y $(a, b) = 1$ y la escritura también es única. Ahora podemos definir $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dada por $f(q) = (a, b)$ tal que $q = \frac{a}{b}$ es fracción reducida, si $q \neq 0$ y $f(0) = (0, 0)$. Entonces f es una función inyectiva: como $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}^*$ (por el resultado anterior), concluimos que $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q})$ y que $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es un conjunto numerable. Así, $\mathbb{Q} \sim f(\mathbb{Q}) \sim \mathbb{N}^*$ (los detalles quedan como □).

Proposición 2.41. *Supongamos que para cada $j \in \mathbb{N}^*$ tenemos un conjunto numerable E_j y definamos*

$$E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}^*} E_j = \{x : \ \exists j \in \mathbb{N}^* \ , \ x \in E_j\} .$$

Entonces E es numerable.

Demostración. Es sencillo verificar que E es conjunto infinito. Por hipótesis, para $j \in \mathbb{N}^*$ existe una biyección $f_j : E_j \to \mathbb{N}^*$. Dado $e \in E$ consideramos $M_e = \{j \in \mathbb{N}^* : \ e \in E_j\} \neq \emptyset$ y definimos $n_0(e) \in \mathbb{N}^*$ como el primer elemento de M_e. En este caso, asignamos el valor $f(e) = (n_0(e), f_{n_0(e)}(e)) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Lo anterior determina una función $f : E \to \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ que resulta inyectiva: si $e \neq e'$ entonces: si $n_0(e) \neq n_0(e')$ vale que $f(e) \neq f(e')$ (difieren en la primera coordenada) y si $n_0(e) = n_0(e')$ entonces $f_{n_0(e)}(e) \neq f_{n_0(e')}(e')$ porque $f_{n_0(e')}$ es inyectiva, y $f(e) \neq f(e')$ (difieren en la segunda coordenada). Así, $E \sim f(E) \subseteq \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}^*$. Por la Proposición 2.37 tenemos que $\mathbb{N}^* \sim f(E) \sim E$ y E es numerable.

■

2.7 Ejercicios del texto

2.1. Probar que Principio de buena ordenación es equivalente al Principio de inducción.

2.2. Dada la operación binaria $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dada por $n \cdot m = 0$ si $n = 0$ o

$$n \cdot m = \underbrace{m + \ldots + m}_{\text{suma de } n \text{ términos}} \in \mathbb{N} .$$

Probar que esta operación verifica: para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$

P1. Asociatividad: $n \cdot (m \cdot p) = (n \cdot m) \cdot p$.

P2. Conmutatividad: $n \cdot m = m \cdot n$.

P3. Existencia de neutro: $1 \cdot n = n$.

P4. si $n \cdot m = 0$ entonces $n = 0$ o $m = 0$.

P5. Si $m \leq p$ entonces $n \cdot m \leq n \cdot p$.

D. Distributividad: $n \cdot (m + p) = n \cdot m + n \cdot p$.

2.3. En $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definimos la relación:

$$(m, n) \sim (p, q) \Leftrightarrow m + q = p + n \in \mathbb{N} .$$

Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

2.4. Dada la operación binaria $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por

$$[(m, n)] + [(p, q)] = [(m + p, n + q)] \in \mathbb{Z} .$$

Probar que la operación en $\mathbb{Z}$ queda definida en función de la suma en $\mathbb{N}$.

2.5. Probar además que la suma en $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades S1-S5.

2.6. Definido el producto en $\mathbb{Z}$ dado por $[(m,n)] \cdot [(p,q)] = [(mp+nq, mq+np)]$, probar que se verifican las propiedades P1.-P3. en $\mathbb{Z}$. Además, probar que vale que

$$[(m,n)] \cdot [(p,q)] = 0_{\mathbb{Z}} \Leftrightarrow [(m,n)] = 0_{\mathbb{Z}} \quad \text{ó} \quad [(p,q)] = 0_{\mathbb{Z}}\,.$$

Por último, probar que la propiedad anterior garantiza la simplificación.

2.7. Demostrar que se verifica la propiedad D (distributiva) en $\mathbb{Z}$.

2.8. Demostrar que el orden el $\mathbb{Z}$ verifica las propiedades O2 y O3 en $\mathbb{Z}$. Además, probar que se verifica P5 siempre que $n \in \mathbb{N}$.

2.9. Definimos $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y consideramos una relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* = \{(p,q) : \ p \in \mathbb{Z}\,,\ q \in \mathbb{Z}^*\}$ dada por

$$(p,q) \approx (r,s) \Leftrightarrow p \cdot s = r \cdot q\,.$$

Probar que $\approx$ es una relación de equivalencia.

2.10. Probar que $\mathbb{Q}$ verifica las propiedades S1.-S4., P1.-P3, P4' y D.

2.11. Probar que si consideramos $\gamma : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $\gamma(p) = \overline{(p,1)} \in \mathbb{Q}$ entonces γ es una función inyectiva que respeta toda la estructura de $\mathbb{Z}$ que hemos considerado: la suma, el producto y el orden.

2.12. Sea $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ 0 \leq x\ ,\ x^2 \leq 2\}$. Probar que no tiene supremo en $\mathbb{Q}$.

2.13. Probar el ejemplo 2.19: demostrar que $\mathbb{Z}_5$ (los enteros módulo 5) con la suma y el producto

$$[n] + [m] = [n+m] \quad \text{y} \quad [n] \cdot [m] = [n \cdot m]$$

donde $[n]$ denota la clase módulo 5 para $n \in \mathbb{Z}$, es un cuerpo (finito).

2.14. Demostrar los siguientes ítems de la Proposición 2.21: Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo. Probar que si x, y, $z \in F$ entonces vale que

1. Si $x \neq 0$: $x \cdot y = x \cdot z \implies y = z$ (simplificación).
2. Si $x \neq 0$: $x \cdot y = x \implies y = 1$ (unicidad de la unidad).
3. Si $x \cdot y = 1 \implies x \neq 0$, $y = x^{-1}$ (unicidad del inverso).
4. Si $x \neq 0$: $(x^{-1})^{-1} = x$.
5. $(-x) \cdot y = x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$.
6. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

2.15. Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo ordenado junto con un subconjunto $P \subseteq F$ (llamado el cono estrictamente positivo). Probar que la transitividad es consecuencia de la propiedad P2 (si a, $b \in P$ entonces $a + b \in P$).

2.16. Demostrar los siguientes ítems de la Proposición 2.25: Sea F un cuerpo ordenado con cono estrictamente positivo $P \subseteq F$. Probar:

1. Si $x \leq 0$, $y \geq z$ entonces $x \cdot y \leq x \cdot z$.
2. Si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en particular, $1 \cdot 1 = 1 > 0$).
3. Si $0 < x \leq y$ entonces $0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.

2.17. Demostrar la Proposición 2.26: Sea $(F, +, \cdot)$ un cuerpo y sea $\leq$ una relación de orden *total* en F que satisface:

O1. Si $y > z$ entonces $y + x > z + x$, para todo $x \in F$.

O2. Si $0 < x$, $0 < y$ entonces $0 < x \cdot y$.

Demostrar que si definimos $P = \{x \in F : \ 0 < x\}$ entonces P resulta un cono estrictamente positivo en F tal que el orden inducido por P (que lo notamos $\leq_P$ para no confundir) coincide con $\leq$.

2.18. Demostrar los pasos a completar del Teorema 2.27. Es decir, probar que existe un cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ tal que $\mathbb{R}$ contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y tal que el orden en $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.

2.19. Ver que $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es no vacío demostrando que $E = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ es una cortadura y que no existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $E = r^*$.

2.20. Completar la demostración de la observación 2.29: Sea $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$ y sea $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \in CS(E)$ (E está acotado superiormente en $\mathbb{R}$). Probar que si $F = E \setminus \{-\infty\} \neq \emptyset$ entonces $F \subseteq \mathbb{R}$ es no vacío y acotado superiormente en $\mathbb{R}$: en este caso existe $\alpha = \sup F$ y vale que $\alpha = \sup E$.

2.21. Demostrar el Teorema 2.30: Con las definiciones anteriores para la suma y la multiplicación probar que $\mathbb{C}$ resulta un cuerpo con elemento neutro para la suma dado por $(0, 0)$ y elemento neutro para el producto dado por $(1, 0)$. Más aún, probar que $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dado por $\Phi(a) = (a, 0)$ es un morfismo de cuerpos que muestra que $\mathbb{C}$ incluye a $\mathbb{R}$ como cuerpo.

2.22. Demostrar el Teorema 2.31: Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Entonces

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{w} \cdot \overline{w}$
3. $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$, $z - \overline{z} = 2\,i\,\Im(z)$.

2.23. Demostrar el Teorema 2.32: Sea z, $w \in \mathbb{C}$. Probar que

1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$.
2. $|\overline{z}| = |z|$.
3. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
4. $|\Re(z)| \leq |z|$.
5. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

2.24. Notemos que si $a \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ entonces podemos considerar $|a|$ en el sentido usual en $\mathbb{R}$ o bien podemos considerar $|a|$ en el sentido del módulo de un número complejo. Probar que estas dos expresiones coinciden.

2.25. Demostrar que no es posible definir un orden en $\mathbb{C}$ que lo convierta en un cuerpo ordenado.

2.26. Demostrar la observación 2.34: Sea U un conjunto y consideremos $P(U) = \{A : \ A \subseteq U\}$ el conjunto de partes de U. Probar que la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $P(U)$.

2.27. Demostrar que si $A \neq \emptyset$ es finito, entonces existe un único $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

2.28. Demostrar que si A y B son conjuntos finitos y no vacíos entonces $A \sim B$ si y solo si A y B tienen la misma cantidad de elementos.

2.29. Completar la demostración del ejemplo 2.36: Probar que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Para ello, consideramos la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & n \text{ es par ;} \\ -(n+1)/2 & n \text{ es impar} \end{cases}$$

y demostrar que f es una biyección.

2.30. Completar la demostración de la Proposición 2.38: Probar que todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.

2.31. Completar la demostración de la Proposición 2.39: Sean $A_1, \ldots, A_n$ conjuntos numerables. Probar que el producto cartesiano $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ es numerable.

2.32. Completar la demostración del Corolario 2.40: Demostrar que $\mathbb{Q}$ es numerable.

2.8 Ejercicios nuevos

2.33. Sea K un cuerpo ordenado. Demostrar

1. (Desigualdad de Bernoulli). Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x > -1$ en K vale $(1+x)^n \geq 1+nx$.
2. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a y $a+x$ positivos. Probar que $(a+x)^n \geq a^n + na^{n-1}x$.
3. (Identidad de Lagrange) $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < j \leq n} (a_k b_j - a_j b_k)^2$.
4. (Desigualdad de Cauchy-Schwarz): $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$.
5. (Desigualdad de Minkowski): $\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$.

2.34. Considerar a racional no nulo y x irracional. Demostrar que ax y $a+x$ son irracionales. Si y es irracional, ¿es cierto que xy es irracional? ¿es cierto que $x+y$ es irracional?

2.35. Probar que el conjunto $a + b\sqrt{2}$ con a y b racionales es un cuerpo ordenado, con las operaciones inducidas y el orden inducido.

2.36. Demostrar que $\mathbb{I}$ es denso en $\mathbb{R}$: si x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ entonces existe $r \in \mathbb{I}$ tal que $x < r < y$.

2.37. Sea S un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$. Denotamos por s una cota superior de S y por r una cota inferior de S.

a) Demostrar que $r \leq s$.

b) Demostrar que $s = \sup(S)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $a \in S$ tal que $s - \varepsilon < a \leq s$.

c) Demostrar que $r = \inf(S)$ si y solo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $b \in S$ tal que $r \leq b < r + \varepsilon$.

2.38. Hallar cotas superiores e inferiores, ínfimo, supremo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos de números reales:

a) $A = (-\infty, 1)$.

b) $B = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

c) $C = [-2, 1)$.

d) $D = \left\{\frac{1}{x^2} : x \in \mathbb{R} - \{0\}\right\}$.

e) $E = \left\{\frac{1}{1+x} : x \in \mathbb{R} - \{-1\}\right\}$.

f) $F = (-2, -1) \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

2.39. Probar que si $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ son tales que B está acotado inferiormente entonces $\inf B \leq \inf A$.

2.40. Considerar A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que $A \cap B \neq \emptyset$. Demostrar las siguientes afirmaciones. Dar ejemplos que muestren en cada caso que puede la igualdad y ejemplos que muestren que puede cumplirse la desigualdad estricta.

a) $\sup(A \cap B) \leq \inf\{\sup(A), \sup(B)\}$.

b) $\sup(A \cup B) \geq \sup\{\sup(A), \sup(B)\}$.

2.41. Demostrar que son equivalentes:

1. El conjunto de números naturales $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$ es no acotado.
2. Para todo $z \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z < n$.
3. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y < nx$.
4. Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $0 < 1/n < x$.

2.42.

a) Demostrar usando la propiedad Arquimediana que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}^*$ tal que para todo $n \geq N$,
$$\left|\frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 2n} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon.$$

b) Sea
$$A = \left\{\frac{n^2 + 2n + 3}{4n^2 + 2n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$
Calcular el ínfimo y el supremo de A.

2.43. Considerar $A \subseteq B$ subconjuntos no vacíos y acotados en $\mathbb{R}$.
Demostrar que $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

2.44. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dos conjuntos acotados. Se sabe que para todo $a \in A$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $b \in B$ tal que $|b - a| < \varepsilon$. Probar que $\inf(A) \leq \sup(B)$. Dar un ejemplo donde valga la igualdad y otro donde no.

2.45. Considerar $B \subseteq A$ conjuntos no vacíos de números reales. Se sabe que A está acotado superiormente y que para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x \leq y$. Demostrar que $\sup A = \sup B$.

2.46. Dados A, $B \subseteq \mathbb{R}$, no vacíos y acotados. Definimos

$$A + B = \{x + y : x \in A,\, y \in B\} \qquad A.B = \{x.y : x \in A,\, y \in B\}$$
$$-A = \{-x : x \in A\} \qquad |A| = \{|x| : x \in A\}$$

1. Probar que:
   a) $A + B$, $A.B$, $-A$ y $|A|$ son acotados.
   b) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$ y $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
   c) $\inf(A) = -\sup(-A)$ y $\sup(A) = -\inf(-A)$
   d) Si todos los números de A y B son positivos entonces $\inf(A.B) = \inf(A).\inf(B)$.
   e) Si todos los números de A y B son positivos entonces $\sup(A.B) = \sup(A).\sup(B)$.
   f) $|\sup A| \leq \sup|A|$ y $\inf|A| \leq |\inf A|$.
2. Considerar $X \subseteq \mathbb{R}$ y sean f, $g : X \to \mathbb{R}$ funciones acotadas.
   a) Mostrar que $(f + g)(X) \subseteq f(X) + g(X)$ y que $f + g$ es acotada.
   b) Mostrar que $\inf(f + g) \geq \inf f + \inf g$ y $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$.
   c) Dar ejemplos donde las desigualdades anteriores quedan estrictas.
   d) Mostrar que $(f.g)(X) \subseteq f(X).g(X)$ y que $f.g$ es acotada.
   e) Mostrar que si f y g son no negativas entonces $\sup(f.g) \leq \sup(f).\sup(g)$ y $\inf(f.g) \geq \inf(f).\inf(g)$.
   f) Dar ejemplos donde las desigualdades anteriores quedan estrictas.

2.47. Demostrar que si $f, g : A \to \mathbb{R}$ son funciones acotadas entonces

$$\left|\sup_{x\in A} f(x) - \sup_{x\in A} g(x)\right| \leq \sup_{x\in A} |f(x) - g(x)|\,.$$

2.48. (*) El propósito del ejercicio es definir la potenciación a^b en el cuerpo ordenado $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que contiene a $\mathbb{Q}$ como subcuerpo (ordenado) y que tiene la propiedad de la mínima cota superior.

O sea, para cada $a > 0$ y $x \in \mathbb{R}$ existe a^x con las propiedades habituales de la potenciación.

- En primer lugar, para $a \neq 0$, definimos

$$a^0 = 1, \qquad a^n = \overbrace{a.a\ldots a}^{n \text{ veces}} \quad \text{y} \quad a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^n \text{ para } n \in \mathbb{N}^*$$

  a) Mostrar que para n, $m \in \mathbb{Z}$ se cumplen

$$a^{n+m} = a^n.a^m \qquad (a^n)^m = a^{n.m}$$

  b) Sean a y b no nulos y $n \in \mathbb{Z}$. Demostrar que $(a.b)^n = a^n.b^n$.
  c) Sean a y b positivos y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $a < b$ si y solo si $a^n < b^n$.

- En segundo lugar, considerar $a > 0$ y $n \in \mathbb{N}^*$

a) Demostrar que hay un único $y > 0$ tal que $y^n = a$.
Ese número y se denota $y = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

Sugerencias paso a paso:

i) Mostrar que $A = \{t \geq 0 : t^n \leq a\}$ es no vacío y acotado superiormente. Definir $y = \sup A$.

ii) Mostrar que si $y^n < a$ entonces cualquier $0 < \varepsilon < \min\{1, \frac{a - y^n}{(y+1)^n - y^n}\}$ cumple que $(y + \varepsilon)^n < a$.

iii) Mostrar que si $y^n > a$ entonces cualquier $0 < \varepsilon < \min\{y, \frac{y^n - a}{ny^{n-1}}\}$ cumple que $y - \varepsilon \notin A$.

iv) Deducir que $y^n = a$.

v) Demostrar que no existe otro $\hat{y} > 0$ tal que $\hat{y}^n = a$.

b) Sean a y b positivos y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $a < b$ si y solo si $a^{1/n} < b^{1/n}$.

c) Sean a y b positivos y $n \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $(a.b)^{1/n} = a^{1/n}.b^{1/n}$.

d) Sean $a > 0$ y n, $m \in \mathbb{N}^*$. Demostrar que $(a^{1/n})^{1/m} = a^{1/(nm)}$.

- En tercer lugar, sea $a > 0$.

a) Si m, n, p y q son enteros, $n > 0$, $q > 0$, y $r = m/n = p/q$ demostrar que

$$(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}.$$

Por lo tanto, no hay ambigüedad en definir $a^r = (a^m)^{1/n}$.

b) Sean a y b positivos y $r \in \mathbb{Q}$. Demostrar que $(a.b)^r = a^r.b^r$.

c) Demostrar que, para r y s racionales, $a^{r+s} = a^r.a^s$ y $(a^r)^s = a^{rs}$.

d) Sea $a > 1$, r y s racionales. Demostrar que $r < s$ si y solo si $a^r < a^s$.

- A continuación, sea $a > 1$.

a) Se define $B_a(x) = \{a^s : s \in \mathbb{Q},\ s \leq x\}$.
Demostrar que, para $r \in \mathbb{Q}$, es $a^r = \sup B_a(r)$.
Se define, para $x \in \mathbb{R}$, $a^x = \sup B_a(x)$.

b) Demostrar que, para x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple $a^{x+y} = a^x.a^y$.

c) Para x e y reales, demostrar que $x < y$ si y solo si $a^x < a^y$.

- Por último, para todo x se define $1^x = 1$ y para $0 < a < 1$ se define $a^x = \left(a^{-1}\right)^{-x}$.

Sean a y b positivos.

a) Demostrar que $a^{-x} = (a^x)^{-1}$.

b) Demostrar que, para x, $y \in \mathbb{R}$ se cumple $a^{x+y} = a^x.a^y$ y $(a^x)^y = a^{xy}$.

c) Para x real, demostrar que $(a.b)^x = a^x.b^x$.

2.49. Decidir si existen a y b irracionales tales que a^b es racional.

2.50. (*) El propósito del ejercicio es definir los logaritmos en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

O sea, para cada $a > 0$ y $x > 0$ existe un único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a^y = x$. Se define $y = \log_a(x)$ y se cumplen las propiedades habituales de los logaritmos.

a) Para $a > 1$, considerar $A = \{w \in \mathbb{R} : a^w < x\}$. Demostrar que existe $y = \sup A$ y que $a^y = x$.

   Sugerencias paso a paso:

   i) Mostrar que A es no vacío y acotado superiormente.
   ii) Demostrar que $a^n \geq n(a-1)+1$.
   iii) Demostrar que $a - 1 \geq n(a^{1/n} - 1)$.
   iv) Demostrar que si $t > 1$ y $n > (a-1)/(t-1)$ entonces $a^{1/n} < t$.
   v) Demostrar que si $a^y < x$ entonces $a^{y+1/n} < x$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
   vi) Demostrar que si $a^y > x$ entonces $a^{y-1/n} > x$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
   vii) Deducir que $a^y = x$.
   viii) Demostrar que no existe otro $\hat{y}$ tal que $a^{\hat{y}} = x$.

b) Para $0 < a < 1$ y $x > 0$, se define $\log_a(x) = -\log_{a^{-1}}(x)$.

c) Dados a, b, x e y positivos, $a \neq 1$, $b \neq 1$ y $r \in \mathbb{R}$, demostrar que

   - $\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
   - $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.
   - $\log_b(a).\log_a(x) = \log_b(x)$.

Bibliografía

[1] Apostol, T. M. (1984). Calculus: Volumen 1. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Editorial Reverté.

[2] Coddington, E. A. (1961). An introduction to ordinary differential equations. Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.

[3] Nagy, G. (2021). Ordinary differential equations.

[4] Rudin, W. (1980). Principios de análisis matemático (3.ª ed.). McGraw-Hill.

Glosario

k-celda cerrada (p. ??)

a lo sumo numerable (p. 20)

acotado en EM (p. ??)

acotado en sucesiones (p. ??)

acotado inferiormente (p. 9)

acotado superiormente (p. 9)

aislado (p. ??)

aproximación de Weierstrass (p. ??)

arquimediano (p. 17)

biyectiva (p. 20)

bola abierta (p. ??)

borde (p. ??)

clausura (p. ??)

co-dominio (p. 20)

compacto (p. ??)

completo (p. ??)

conexo (p. ??)

conjunto de cotas inferiores (p. 9)

conjunto de cotas superiores (p. 9)

conjunto ordenado (p. 9)

concatenación (p. ??)

contracción (p. ??)

convergencia puntual y uniforme de series (p. ??)

convergencia uniforme e integración (p. ??)

convergencia uniforme y diferenciación (p. ??)

converge absolutamente (p. ??)

converge en sucesiones (p. ??)

converge puntualmente (p. ??)

converge uniformemente (p. ??)

coordinables (p. 20)

criterio de Cauchy (p. ??)

criterio de Cauchy para series (p. ??)

criterio de comparación (p. ??)

criterio de la razón (p. ??)

criterio de la raíz (p. ??)

criterio de Leibnitz para series alternantes (p. ??)

criterio de Weierstrass para series de funciones (p. ??)

cubrimiento (p. ??)

cuerpo (p. 11)

cuerpo ordenado (p. 12)

débilmente equivalentes (p. ??)

denso (p. ??)

derivada direccional (p. ??)

derivada parcial (p. ??)

derivadas de orden superior (p. ??)

desarrollo de Taylor (p. ??)

diferencial (p. ??)

diferenciable en una variable (p. ??)

diferenciable en varias variables (p. ??)

diámetro en EM (p. ??)

diámetro en los reales (p. ??)

disconexo (p. ??)

discontinuidad de primer clase (p. ??)

discontinuidad de segunda clase (p. ??)

distancia a un conjunto (p. ??)

diverge en sucesiones (p. ??)

dominio (p. 20)

ecuación diferencial ordinaria (p. ??)

ecuaciones de variables separadas (p. ??)

ecuaciones exactas (p. ??)

familia equicontinua (p. ??)

finito (p. 20)

función (p. 20)

función continua (p. ??)

función inversa (p. 20)

fuertemente equivalentes (p. ??)

homeomorfismo (p. ??)

imagen (p. 20)

infinito (p. 20)

ínfimo (p. 10)

inyectiva (p. 20)

integración por partes (p. ??)

integral de Riemann (p. ??)

integral de Riemann en varias variables (p. ??)

límite al infinito de funciones (p. ??)

límite de una función (p. ??)

límite inferior (p. ??)

límite superior (p. ??)

límites laterales (p. ??)

Lipschitz en la segunda variable (p. ??)

localmente Lipschitz en la segunda variable (p. ??)

máximo local (p. ??)

métrica (p. ??)

mínima cota superior (p. 10)

mínimo local (p. ??)

monótona creciente en funciones (p. ??)

monótona creciente en sucesiones (p. ??)

monótona decreciente en funciones (p. ??)

monótona decreciente en sucesiones (p. ??)

monótona en funciones (p. ??)

monótona en sucesiones (p. ??)

no numerable (p. 20)

norma (p. ??)

norma supremo (p. ??)

numerable (p. 20)

números complejos (p. 19)

números enteros (p. 5)

números naturales (p. 4)

números racionales (p. 8)

orden (p. 4)

partición (p. ??)

polinomio de Taylor (p. ??)

preimagen (p. 20)

producto de los números complejos (p. 19)

producto de los números enteros (p. 7)

producto de los números naturales (p. 5)

producto de los números racionales (p. 8)

producto interno (p. ??)

proyección (p. ??)

propiedad de intersección finita (p. ??)

punto interior (p. ??)

punto límite (p. ??)

puntualmente acotada (p. ??)

reales extendidos (p. 18)

refina (p. ??)

regla de la cadena (p. ??)

relativo (p. ??)

radio de convergencia (p. ??)

reordenamiento de la serie (p. ??)

representaciones matriciales (p. ??)

separable (p. ??)

serie convergente (p. ??)

serie de potencias (p. ??)

serie divergente (p. ??)

subcubrimiento finito (p. ??)

subsucesión (p. ??)

sucesión convergente a infinito (p. ??)

sucesión de Cauchy (p. ??)

suma de los números complejos (p. 19)

suma de los números enteros (p. 6)

suma de los números naturales (p. 4)

suma de los números racionales (p. 8)

suma inferior de Riemann (p. ??)

suma superior de Riemann (p. ??)

sumas parciales (p. ??)

supremo (p. 9)

suryectiva (p. 20)

teorema de continuación (p. ??)

teorema de Dini (p. ??)

teorema de la función implícita (p. ??)

teorema de la función inversa (p. ??)

teorema de los valores intermedios (p. ??)

teorema de los valores intermedios para la derivada (p. ??)

teorema del valor medio generalizado (p. ??)

teorema fundamental del cálculo (p. ??)

teorema global de Picard (p. ??)

teorema global de Picard para sistemas de EDOs de primer orden (p. ??)

teorema local de Picard (p. ??)

topología inducida (p. ??)

totalmente ordenado (p. 10)

transformación lineal (p. ??)

uniformemente acotada (p. ??)

uniformemente continua (p. ??)

uniformemente de Cauchy (p. ??)