Estructuras Algebraicas

Práctica 4 - Productos, Grupos abelianos Libres, Teorema de Estructura y S.E.C

Productos directos y productos directos libres

Ejercicio 1. Si $\{G_i, i \in I\}$ es una familia de grupos, probar que:

i) El producto directo $\prod_{i\in I} G_i$ es un grupo.

ii) Para cada $k \in I$, la función $\pi_k : \prod_{i\in I} G_i \to G_k$ dada por $f \mapsto f(k)$ (o $\{a_i\} \mapsto a_k$), es un epimorfismo de grupos.

Ejercicio 2. Si $\{G_i, i \in I\}$ es una familia de grupos, probar que:

i) El producto directo débil, $\prod_{i\in I}^{w} G_i$ es un subgrupo normal de $\prod_{i\in I} G_i$.

ii) Para cada $k \in I$, la función $\iota_k : G_k \to \prod_{i\in I}^{w} G_i$ dada por $\iota_k(a) = f_a$, donde $f_a(i) = e_i$ si $i \neq k$ y $f_a(k) = a$, es un monomorfismo de grupos (donde estamos pensando que e_i es el elemento neutro de G_i).

iii) Para cada $i \in I$, $\iota_i(G_i)$ es un subgrupo normal de $\prod_{i\in I}^{w} G_i$.

Producto Libre - Construcción

Dada una familia $\{G_i, i \in I\}$ de grupos mutuamente disjuntos, sea $X := \bigcup_{i\in I} G_i$ y sea $\{1\}$ un conjunto unitario disjunto de X. Una *palabra* en X es una secuencia $(a_1, a_2, ...)$ tal que $a_i \in X \cup \{1\}$ y para algún $n \in \mathbb{N}$, $a_i = 1$ para todo $i \geq n$. Una tal palabra es *reducida* si:

i) ningún $a_i \in X$ es el neutro de ningún grupo;

ii) para todo $i, j \geq 1$, a_i y a_{i+1} no son elementos del mismo grupo G_j;

iii) si $a_k = 1$, entonces $a_i = 1$ para todo $i \geq k$.

En particular, $(1, 1, ...)$ es reducida. Toda palabra reducida se puede escribir de manera única como $(a_1, a_2, ..., a_n, 1, 1, ...)$, con $a_i \in X$ y $n \in \mathbb{N}$; así, la escribiremos directamente como $a_1a_2...a_n$.

Sea $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ el conjunto de todas las palabras reducidas en X. $\prod_{i\in I}^{*} G_i$ es un grupo, que se llama **producto libre** de la familia $\{G_i, i \in I\}$, con la operación binaria dada como sigue: 1 es el elemento neutro, y el producto entre dos palabras reducidas es la yuxtaposición, seguida de cancelaciones y contracciones si es necesario. Por ejemplo, si $a_i, b_i \in G_i$, para $i = 1, 2, 3$, entonces $(a_1a_2a_3)(a_3^{-1}b_2b_1b_3) = a_1c_2b_1b_3$, donde $c_2 = a_2b_2 \in G_2$. Finalmente, para cada $k \in I$ tenemos la aplicación $\iota_k : G_k \to \prod_{i\in I}^{*} G_i$ dada por $e \mapsto 1$ y $a \mapsto (a, 1, 1, ...)$ que es un monomorfismo de grupos.

Ejercicio 3. Sea $\{G_i, i \in I\}$ una familia de grupos disjuntos y $\prod^*_{i\in I} G_i$ su producto libre. Probar que si se tiene un grupo H junto con una familia $\{\psi_i : G_i \to H, i \in I\}$ de morfismos de grupo, entonces existe un único morfismo $\psi : \prod^*_{i\in I} G_i \to H$ tal que $\psi\iota_i = \psi_i$ para todo $i \in I$. Además, esta propiedad caracteriza a $\prod^*_{i\in I} G_i$ salvo isomorfismo.

El resultado que se prueba con este ejercicio 3, se puede visualizar mediante un diagrama:

$$\begin{tikzcd} G_k \arrow[r, "\iota_k"] \arrow[d, "\psi_k"'] & \prod^*_{i\in I} G_i \arrow[dl, dashed, "\exists!\psi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

Ejercicio 4. Si F es un grupo libre abeliano con base X, $F = \sum_{x\in X} \mathbb{Z}x$, y G es el subgrupo con base $X' = X - \{x_0\}$ para algún $x_0 \in X$, probar que $F/G \simeq \mathbb{Z}x_0$.

Teorema de Estructura

Ejercicio 5. Sea G un grupo abeliano, y $m, p \in \mathbb{Z}$ tales que p es primo. Demostrar que cada uno de los siguientes subconjuntos de G son subgrupos[1]:

(a) $mG = \{mu, u \in G\}$;

(b) $G[m] = \{u \in G : mu = 0\}$;

(c) $G(p) = \{u \in G : ord(u) = p^n \text{ para algún } n \geq 0\}$;

(d) $G_t = \{u \in G : ord(u) \text{ es finito}\}$.

En particular, hay isomorfismos

(e) $\mathbb{Z}_{p^n}[p] \simeq \mathbb{Z}_p$ $(n \geq 1)$ y $p^m\mathbb{Z}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}_{p^{n-m}}$ $(m < n)$;

Ahora sumemos H y $G_i, i \in I$ grupos abelianos.

(f) Si $g : G \to \sum_{i\in I} G_i$ es un isomorfismo, entonces las restricciones de g a mG y a $G[m]$ respectivamente, dan isomorfismos $mG \simeq \sum_{i\in I} mG_i$ y $G[m] \simeq \sum_{i\in I} G_i[m]$;

(g) Si $f : G \to H$ es un isomorfismo, entonces las restricciones de f a G_t y a $G(p)$ dan respectivamente isomorfismos $G_t \simeq H_t$ y $G(p) \simeq H(p)$.

Ejercicio 6. Sean $k, m \in \mathbb{N}$. Probar que:

(a) Si $(k, m) = 1$, entonces $k\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_m$ y $\mathbb{Z}_m[k] = 0$.

(b) Si $m = kd$, con $k \in \mathbb{N}$, entonces $k\mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_d$ y $\mathbb{Z}_m[k] \simeq \mathbb{Z}_k$.

Ejercicio 7. Calcular los factores invariantes y los divisores elementales de los siguientes grupos:

(a) $G := \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{35}$.

[1] Importante: este ejercicio está planteado en notación aditiva

(b) $H := \mathbb{Z}_{26} \oplus \mathbb{Z}_{42} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}_{200} \oplus \mathbb{Z}_{1000}$.

(c) $K := \mathbb{Z}_{32} \oplus \mathbb{Z}_{14}$

Ejercicio 8. Determinar todos los grupos abelianos de orden 1400 (salvo isomorfismo), y todos los grupos abelianos de orden 30.

Ejercicio 9. Dar ejemplos de:

(a) Un grupo abeliano finito que no sea cíclico y que todos sus subgrupos propios no triviales sean cíclicos.

(b) Un grupo abeliano finito tal que todos sus subgrupos propios sean de orden primo.

(c) Un grupo abeliano de orden 36 que no contenga elementos de orden 4.

(d) Un grupo abeliano que posea exactamente 3 subgrupos propios no triviales.

Ejercicio 10. Determinar todos los subgrupos del grupo $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_5$

Ejercicio 11. Demostrar que todo grupo abeliano finito no cíclico tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, para algún primo p.

Sucesiones exactas

En estos ejercicios, "0" simboliza al grupo trivial.

Ejercicio 12. Sean G un grupo y $K \subset H$ dos subgrupos normales de G. Probar que existe un diagrama conmutativo, cuyas filas son sucesiones exactas, de la forma:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G/H \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H/K \arrow[r] & G/K \arrow[r] & G/H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Concluir que $(G/K)/(H/K) \simeq G/H$.

Ejercicio 13. Sean $f : G \longrightarrow G'$ un morfismo de grupos, $H' \lhd G'$ y $H := f^{-1}(H')$. Mostrar que $H \lhd G$ y que f induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "f"] & G/H \arrow[r] \arrow[d, "\bar{f}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H' \arrow[r] & G' \arrow[r] & G'/H' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

con $\bar{f}$ inyectiva.