Estructuras Algebraicas

Práctica 3 - Acciones de grupos - Teoremas de Sylow

Ejercicio 1. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X. Justificar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

(a) Si $g \cdot x = x$, para todo $x \in X$, entonces $g = e$, donde e es el neutro de G.

(b) Sean $x_1, x_2 \in X$ y $g \in G$. Si $g \cdot x_1 = g \cdot x_2$, entonces $x_1 = x_2$.

(c) Sean $x \in X$ y $g_1, g_2 \in G$. Si $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$, entonces $g_1 = g_2$.

Ejercicio 2. Probar que las siguientes son acciones:

(a) Dado $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$, G actúa en X mediante

$$s \cdot x = x^s, \text{ para } s \in G, x \in X.$$

(b) Dado X un conjunto, mostrar que $S(X)$ actúa en X mediante

$$f \cdot x = f(x), \text{ para } f \in S(X), x \in X.$$

Más aún, mostrar que esta acción es fiel y transitiva, y que es libre si y solo si X tiene a lo sumo 2 elementos.

(c) *(Traslación a izquierda)* Dado G grupo y $H \subseteq G$ subgrupo, mostrar que G actúa en G/H mediante

$$g \cdot (aH) = (ga)H, \text{ para } g \in G, aH \in G/H.$$

(d) *(Por conjugación)* Dado G un grupo y $H \subseteq G$ un subgrupo normal, mostrar que G actúa en H mediante

$$g \cdot h = ghg^{-1}, \text{ para } g \in G, h \in H.$$

Ejercicio 3. Sean G un grupo y X, Y, Z G-conjuntos.

(a) Probar que la función identidad $id_X : X \to X$ es G-equivariante.

(b) Probar que si $\varphi : X \to Y$ y $\psi : Y \to Z$ son funciones G-equivariantes, entonces $\psi \circ \varphi : X \to Z$ también.

(c) Probar que si $\varphi : X \to Y$ es un morfismo G-equivariante que es biyectivo, entonces $\varphi^{-1} : Y \to X$ también.

Ejercicio 4. Sean G un grupo, $H \subseteq G$ un subgrupo y $s \in G$. Dar una función biyectiva $\phi : G/H \to G/sHs^{-1}$ que sea equivariante con respecto a la traslación a izquierda.

Ejercicio 5. Sea G un grupo que actúa sobre un conjunto X. Sean $x, y \in X$ tales que $y = g \cdot x$, para algún $g \in G$. Probar que $G_y = gG_xg^{-1}$, donde G_x y G_y son los subgrupos estabilizadores de x e y, respectivamente. Concluir que $|G_x| = |G_y|$.

Ejercicio 6. Sea G un grupo, p un número primo, $n \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $|G| = p^n$, entonces $Z(G) \neq \{e\}$.

(b) Probar que si $G/Z(G)$ es cíclico, entonces G es abeliano.

(c) Probar que si $|G| = p^2$, entonces G es abeliano.

Ejercicio 7. Sea p un número primo y G un grupo no abeliano de orden p^3. Calcular $|Z(G)|$ y $|\,[G,G]\,|$.

Ejercicio 8. Dado G un grupo abeliano finito, probar que es simple si y solo si $|G|$ es un número primo.

Ejercicio 9. Calcular todos los p-subgrupos de Sylow de $\mathbb{Z}_{12}$, de $\mathbb{Z}_{p^k}$ con p primo y $k \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{S}_3$ y de $\mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 10. Probar que si p y q son dos primos distintos y G es un grupo de orden pq, entonces no es simple.

Ejercicio 11. Demostrar que no hay grupos simples de orden 56 ni de orden 148.

Ejercicio 12. Sea G un grupo abeliano, con $|G| = p^k.m$, siendo p primo, $k, m \in \mathbb{N}$ tales que $(p, m) = 1$. Probar que G tiene un único p-subgrupo de Sylow.

Ejercicio 13. Demostrar que dado un grupo G y un número primo p, si hay un único p-subgrupo de Sylow, H, entonces $H \lhd G$.

Ejercicio 14. Sean G un p-grupo finito y $N \lhd G$ tal que $|N| = p$. Probar que $N \subset Z(G)$.

Ejercicio 15. ($\clubsuit$) Probar que si G es un grupo con 6 elementos, entonces es cíclico o isomorfo a $\mathbb{S}_3$.