Estructuras Algebraicas

Práctica 2 - Subgrupos normales, Teorema de Lagrange, Teorema de isomorfismo

Ejercicio 1. Sean G un grupo, y $H \subseteq G$ un subgrupo. Sabemos que un subgrupo H es *normal en* G (lo cual se nota $H \lhd G$), si verifica que $gHg^{-1} \subseteq H \quad \forall g \in G$.

Probar que esta definición es equivalente a las siguientes:

(a) Las coclases a derecha y a izquierda coinciden. O sea, $gH = Hg \quad \forall g \in G$.

(b) $gHg^{-1} = H \quad \forall g \in G$.

Ejercicio 2. Mostrar que:

a) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ es un subgrupo normal de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

b) El subgrupo H de $\mathbb{S}_3$ generado por $(1\ 2\ 3)$ es normal en $\mathbb{S}_3$. Calcular $\mathbb{S}_3/H$, verificando que es un grupo; ¿a qué grupo es isomorfo?

Ejercicio 3. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que $ker(f) \lhd G$ y que, si f es suryectiva, $Im(f) \lhd H$.

Ejercicio 4. Demostrar que si G es abeliano, entonces todo subgrupo de G es normal. Mostrar que la recíproca no es cierta (*Sugerencia: considerar como G al grupo $\mathcal{H}$ definido en el ejercicio 7 de la práctica 1).*

Ejercicio 5. Mostrar que si H es un subgrupo de un grupo G tal que $[G : H] = 2$, entonces $H \lhd G$.

Ejercicio 6. Sea H un subgrupo de un grupo G. Mostrar que:

(a) Para todo $a \in G$, aHa^{-1} es un subgrupo de G isomorfo a H.

(b) Supongamos que G es finito y que $|H| = n$. Si H es el único subgrupo de orden n de G, entonces H es normal.

Ejercicio 7. Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupos. Probar que si H es abeliano y $N \subseteq G$ es un subgrupo que contiene a $\ker(f)$, entonces N es normal en G.

Ejercicio 8. Demostrar que dado un grupo G, si $|G|$ es primo, entonces los únicos subgrupos de G son $\{e\}$ y G.

Ejercicio 9. Sean H y K subgrupos finitos de un grupo G. Probar que

(a) $|HK| = |H||K|/|H \cap K|$.

(b) $[H \vee K : H] \geq [K : H \cap K]$, donde $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$.

Ejercicio 10. Dado un grupo finito G y un elemento $a \in G$, demostrar que:

a) $ord(a)$ divide a $|G|$.

b) Si $|G| = n$, entonces $a^n = e$.

c) Si $|G| = p$ con p primo, entonces G es isomorfo a $\mathbb{Z}_p$.

Ejercicio 11. Sean $p > q$ primos. Probar que si G es un grupo de orden pq, entonces G admite a lo sumo un subgrupo de orden p.

Ejercicio 12. Si G es un grupo y $a, b \in G$, definimos el *conmutador* de a y b como

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

El subgrupo generado por todos los conmutadores de elementos de G, notado G' o $[G, G]$, es llamado *subgrupo conmutador* de G.

(a) Mostrar que $G' \lhd G$.

(b) Probar que si $N \lhd G$, entonces G/N es abeliano si y solo si $G' \subset N$. En particular, G/G' es abeliano.

Ejercicio 13. Probar que no existe un epimorfismo de grupos $f : \mathbb{S}_4 \to \mathbb{Z}_{14}$.

Ejercicio 14. Probar que:

(a) $\mathbb{C}^X/\mathbb{R}_{\leq 0} \simeq S^1$.

(b) $\mathbb{Q}^X/\mathbb{Q}_{\leq 0} \simeq G_2$.

Ejercicio 15. Calcular $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.