Estructuras Algebraicas

Práctica 1 - Grupos

Grupos y subgrupos

Ejercicio 1. Mostrar que los siguientes conjuntos forman un grupo:

(a) $G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ con la multiplicación.

(b) $\mathbb{Q}_{>0}$ con la multiplicación.

(c) $Aut_k(V) = \{f : V \to V : f \text{ es lineal y biyectiva}\}$, con la composición, siendo V un k-espacio vectorial.

(d) $\mathcal{U}_n = \{k \in \mathbb{N} : (k, n) = 1, k \leq n\}$ con la multiplicación módulo n.

(e) Para $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathrm{GL}(n, k) := \{A \in M(n, k) \mid \det A \neq 0\}$, llamado *grupo general lineal*, con el producto matricial.

Ejercicio 2. Probar que los siguientes son subgrupos del grupo general lineal correspondiente.

(a) El conjunto $SL(n, \mathbb{Z}) := \{A \in M(n, \mathbb{Z}) \mid \det A = 1\}$, donde $M(n, \mathbb{Z})$ es el conjunto de matrices de orden $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

(b) Para $k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $\mathrm{SL}(n, k) := \{A \in M(n, k) \mid \det A = 1\}$, llamado *grupo especial lineal*.

(c) El *grupo ortogonal* $\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = AA^t = I\}$.

Ejercicio 3. Probar que el neutro en un grupo G es único y que, dados $g, h \in G$:

(a) El inverso de g es único.

(b) $(gh)^{-1} = h^{-1}.g^{-1}$.

(c) Si $g^2 = g$, entonces $g = e$.

Ejercicio 4. Probar que dado M monoide, el conjunto $inv(M) = \{x \in M : x \text{ es inversible}\}$ es grupo.

Ejercicio 5. Mostrar que el grupo $\mathbb{S}_n$ tiene $n!$ elementos y que no es abeliano si $n \geq 3$.

Describir por extensión $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{S}_4$ e identificar a los grupos $\mathbb{D}_3$ y $\mathbb{D}_4$ como subgrupos de $\mathbb{S}_3$ y $\mathbb{S}_4$, respectivamente. Determinar si son subgrupos propios o no.

Ejercicio 6. Realizar las tablas de grupos posibles para los grupos de a lo sumo 4 elementos, obviando las tablas que son "estructuralmente equivalentes". Verificar que en todos los casos la operación del grupo resulta abeliana.

Ejercicio 7. Probar que

$$\mathcal{H} := \{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\}$$

es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$. Determinar si es abeliano.

Ejercicio 8. Dados A, B grupos, se define una operación binaria en el conjunto $A \times B$ como

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb'), \quad a, a' \in A, b, b' \in B.$$

Probar que $A \times B$ es grupo.

Ejercicio 9. Sea G un grupo arbitrario. Definimos el *centro* de G como el conjunto

$$Z(G) := \{a \in G \mid ab = ba \ \forall b \in G\}.$$

Mostrar que $Z(G)$ es un subgrupo abeliano de G y que G es un grupo abeliano si y solo si $Z(G) = G$.

Ejercicio 10. Probar que si H, K son subgrupos de G, entonces $H \cap K$ es subgrupo de G ¿Qué se puede decir de $H \cup K$?

Ejercicio 11. Mostrar que si G es un grupo y X es un subconjunto no vacío de G, entonces

$$\langle X \rangle = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid n \in \mathbb{N} \text{ y para cada } 1 \leq i \leq n,\ a_i \in X \text{ o } a_i^{-1} \in X\},$$

es decir, $\langle X \rangle$ consiste de todos los productos finitos de elementos de X e inversos de elementos de X.

Ejercicio 12. Si G es grupo y $g \in G$, definimos el *centralizador* de g como el subconjunto $C(g) \subset G$ dado por

$$C(g) := \{a \in G \mid ag = ga\}.$$

Mostrar que $C(g)$ es un subgrupo de G que contiene al subgrupo $\langle g \rangle$, y que $C(g) = G$ si y solo si $g \in Z(G)$.

Morfismos

Ejercicio 13. Formalizar el siguiente enunciado y probarlo:
Un morfismo de grupos manda el neutro al neutro y manda inversos en inversos.

Ejercicio 14. Probar que un morfismo de grupos es monomorfismo si y solo si su núcleo es el subgrupo trivial.

Ejercicio 15. Mostrar que el conjunto de automorfismos de un grupo G, notado $\mathrm{Aut}(G)$, es un grupo con la composición y que existe un isomorfismo de grupos $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$. (Sugerencia: considerar que para conocer la expresión de un morfismo $f \in Aut(\mathbb{Z})$, alcanza con conocer $f(1)$).

Ejercicio 16. Sean G un grupo y $g \in G$. Definimos la aplicación $Ad(g) : G \longrightarrow G$ como

$$Ad(g)(a) := gag^{-1}.$$

Mostrar que $Ad(g) \in \mathrm{Aut}(G)$. Verificar que la aplicación $Ad : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$ dada por $g \mapsto Ad(g)$ es un morfismo y calcular $\ker(Ad)$.

Ejercicio 17. Considerar las propiedades P_i:
P_1: tener n elementos. P_2: ser finito. P_3: ser abeliano.
P_4: ser no abeliano. P_5: ser cíclico.

(a) Sea $f : G \to L$ un epimorfismo de grupos. Decidir para cuáles P_i vale que "Si G verifica P_i entonces L verifica P_i".

(b) Sea $g : G \to L$ un monomorfismo de grupos. Decidir para cuáles P_i vale que "Si L verifica P_i entonces G verifica P_i":

A partir de esto, decidir qué propiedades se preservan por isomorfismo.

Ejercicio 18. Determinar si G y K son isomorfos:
- $G = \mathbb{Z}_4$ y $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;
- $G = \mathbb{Z}_n$ y $K = G_n$;
- $G = \mathbb{Z}_{10}$ y $K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.

Nota: ya puede ser necesario empezar a entender cómo trabajar con morfismos que están definidos en cocientes.

Cíclicos

Ejercicio 19. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{S}_3, \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

Ejercicio 20. Mostrar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$, entonces $H = \langle 0 \rangle$ o $H = \langle m \rangle$, donde m es el menor entero positivo que pertenece a H. Notar que esto implica que todo subgrupo de $\mathbb{Z}$ es cíclico ¿Es casualidad?

Ejercicio 21. Sea $G = \langle g \rangle$ un grupo cíclico. Probar que, o bien $G \simeq \mathbb{Z}$, o bien $G \simeq \mathbb{Z}_m$, para algún $m \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 22. Hallar el orden de x en G en los siguientes casos:

(a) En $G = \mathbb{S}_8$, $x = (12)(567)$, y $x = (12345)(1378)$.

(b) En $G = \mathbb{Z}_{12}$, $x = 2$, $x = 3$ y $x = 5$.

(c) En $G = \mathcal{H}$, $x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

Ejercicio 23. Sea g un elemento en un grupo con $ord(g) = m$ y $k \in \mathbb{N}$. Probar que $g^k = e$, si y solo si $m|k$.

Ejercicio 24. Sean G un grupo abeliano y $g, h \in G$ tales que $\mathrm{ord}(g) = m$ y $\mathrm{ord}(h) = n$. Probar que:

(a) Si $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \langle e \rangle$, entonces $\mathrm{ord}(gh) = \mathrm{mcm}(m, n)$.

(b) Si $(m, n) = 1$, entonces $\mathrm{ord}(gh) = mn$.

Ejercicio 25. Mostrar que $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{nm}$ sii $(n, m) = 1$.

Ejercicio 26. (♣) Sea p un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \}.$$

Probar que G es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p.