Matemática 3 – 2º cuatrimestre

Práctica 6: Estimación puntual.

1. Sea $X_1, ..., X_8$ una muestra aleatoria de una distribución con media μ y varianza σ^2. Considere los siguientes tres estimadores para μ

$$\hat{\mu}_1 = 2X_1 - 4X_6 + 3X_4; \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + 7X_8}{8}; \qquad \hat{\mu}_3 = \bar{X}$$

   a) Demuestre que cada uno de ellos es insesgado para μ.

   b) Determine la eficiencia relativa de μ_3 con respecto a μ_1 y μ_2 respectivamente.

   c) ¿Cuál de los tres estimadores considera que es el mejor? ¿En qué sentido?

2. Sea $X \sim B(n, p)$. Consideremos los estimadores $\hat{p}_1 = \dfrac{X}{n}$ y $\hat{p}_2 = \dfrac{(X+1)}{n+2}$

   a) ¿Es alguno de ellos insesgado?

   b) Hallar el ECM de cada uno de ellos.

   c) ¿Son consistentes?

3. Sea X una variable aleatoria con densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5(1+\theta x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & cc \end{cases} \qquad \text{donde el parámetro } \theta \text{ es tal que } -1 < \theta < 1$$

   a) Determine un estimador de θ por el método de los momentos, $\hat{\theta}$.

   b) ¿Es insesgado?

   c) Hallar el $ECM\left(\hat{\theta}\right)$. ¿es $\hat{\theta}$ un estimador consistente para θ?

4. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v. a. $X \sim U(-\theta, \theta)$. Hallar el estimador de θ usando el método de momentos.

5. Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una v. a. $X \sim Ge(p)$. Hallar el EMV de p.

6. Sea X la proporción de tiempo que un estudiante, elegido al azar, emplea para realizar una prueba. Supongamos que la densidad de X está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} (1+\theta)x^{\theta} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & cc \end{cases}$$

   donde $\theta > -1$.

   a) Obtenga por el método de los momentos, un estimador para θ.

   b) Obtenga el EMV para θ.

   c) Usando $b)$ estime la $P(X > 0,6)$. ¿Qué propiedad utiliza?

   d) Dados los siguientes valores obtenidos para una muestra de 10 estudiantes:

   0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77

   Calcule el valor de los estimadores obtenidos en a), b) y c).

7. El número de discos duros defectuosos fabricados diariamente por una línea de producción, puede modelarse como una distribución Poisson.

   a) Determine el EMV del parámetro de la distribución.

   b) Calcule la esperanza y la varianza de ese estimador.

   c) Demuestre que es un estimador consistente.

   d) Si los conteos para 10 días son:

   $$7 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2$$

   obtenga el estimador de máxima verosimilitud y la estimación de la probabilidad de 0 o 1 defectos en un día.

8. Suponga que T, el tiempo de falla (en horas) de un instrumento tiene la siguiente función de densidad:

   $$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)} & \text{si } x > \theta \\ 0 & cc \end{cases}$$

   donde $\theta > 0$. (T tiene distribución exponencial truncada a la izquierda).

   a) Obtenga el EMV para θ.

   b) Obtenga el EMV para $P(T > 850)$.

   c) Dadas las siguientes observaciones de esa distribución, calcule los valores de los estimadores calculados en *a*) y *b*)

   $$610, 715, 605, 698, 564, 638, 673, 682, 623, 579, 618, 635, 633, 720, 737, 809$$