MATEMÁTICAS ESPECIALES II - 2024

PRÁCTICA 3

Ecuaciones diferenciales exactas

Definición. Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \tag{1}$$

es exacta si existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$d\,\varphi(x,y) = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy.$$

Teorema. Si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son continuas, con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa del plano xy, entonces la ecuación (1) es exacta si, y solo si,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Método de solución. Las soluciones de la ecuación (1) están dadas (en forma implícita) por las curvas de nivel $\varphi(x,y) = c$; o bien,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} M(\hat{x},y_0)\,d\hat{x} + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} N(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{y} = c \qquad \text{(ver Figura 1)}$$

o, alternativamente,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} N(x_0,\hat{y})\,d\hat{y} + \int_{(x_0,y)}^{(x,y)} M(\hat{x},\hat{y})\,d\hat{x} = c \qquad \text{(ver Figura 2)}$$

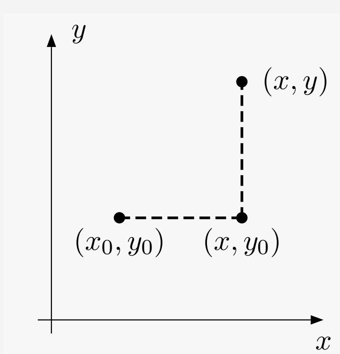


Figura 1

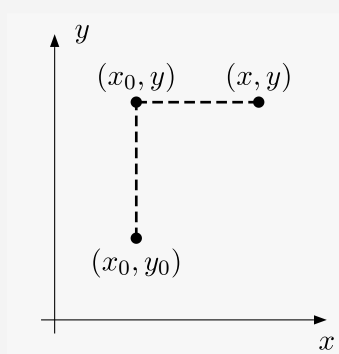


Figura 2

Ejemplo 1.

a) Resolver la ecuación diferencial $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$.

Comprobemos primero que la ecuación dada sea una diferencial exacta. En este caso, las funciones M y N son infinitamente derivables en $\mathbb{R}^2$ y, además,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(\sin xy + xy\cos xy) = x\cos xy + x\cos xy - x^2y\sin xy\\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}x^2\cos xy = 2x\cos xy - x^2y\sin xy\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Por consiguiente,

$$\varphi(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x_0,y)} \hat{x}_0^2\cos x_0\hat{y}\,d\hat{y} + \int_{(x_0,y)}^{(x,y)}(\sin\hat{x}\hat{y} + \hat{x}\hat{y}\cos\hat{x}\hat{y})\,d\hat{x} = x_0\sin x_0\hat{y}\Big|_{y_0}^{y} + \hat{x}\sin\hat{x}\hat{y}\Big|_{x_0}^{x} = c,$$

de modo que la solución general de la ecuación (definida en forma implícita) será

$$x\sin xy - x_0\sin x_0y_0 = c \Longrightarrow x\sin xy = k; \quad k = c + x_0\sin x_0y_0.$$

b) Resolver el PVI $\begin{cases} y' = \dfrac{xy^2 - \cos x\sin x}{y(1-x^2)} \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

Primero, escribamos la ecuación de la forma

$$\underbrace{(\cos x\sin x - xy^2)}_{M(x,y)}\,dx + \underbrace{y(1-x^2)}_{N(x,y)}\,dy = 0,$$

y comprobemos que sea una diferencial exacta. Se tiene

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x};$$

por lo tanto, existe una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = N(x,y).$$

Determinaremos $\varphi(x,y)$ integrando $M(x,y)$ respecto a x mientras y se mantiene constante; haciendo esto, tendremos

$$\varphi(x,y) = \int(\cos x\sin x - xy^2)\,dx + \eta(y) = -\frac{1}{2}(\cos^2 x + x^2y^2) + \eta(y),$$

donde la función arbitraria $\eta(y)$ es la *constante de integración con respecto a* x.

Para determinar $\eta(y)$ derivamos esta expresión parcialmente con respecto a y e igualamos el resultado a $N(x,y)$; de este modo,

$$\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = -x^2y + \eta'(y) = y(1-x^2) \Longrightarrow \eta'(y) = y \Longrightarrow \eta(y) = \frac{1}{2}y^2.$$

Luego, las curvas integrales estarán definidas implítamente por la relación

$$\varphi(x, y) = c \Longrightarrow -\frac{1}{2}(\cos^2 x + x^2y^2) + \frac{1}{2}y^2 = c \Longrightarrow y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 2c.$$

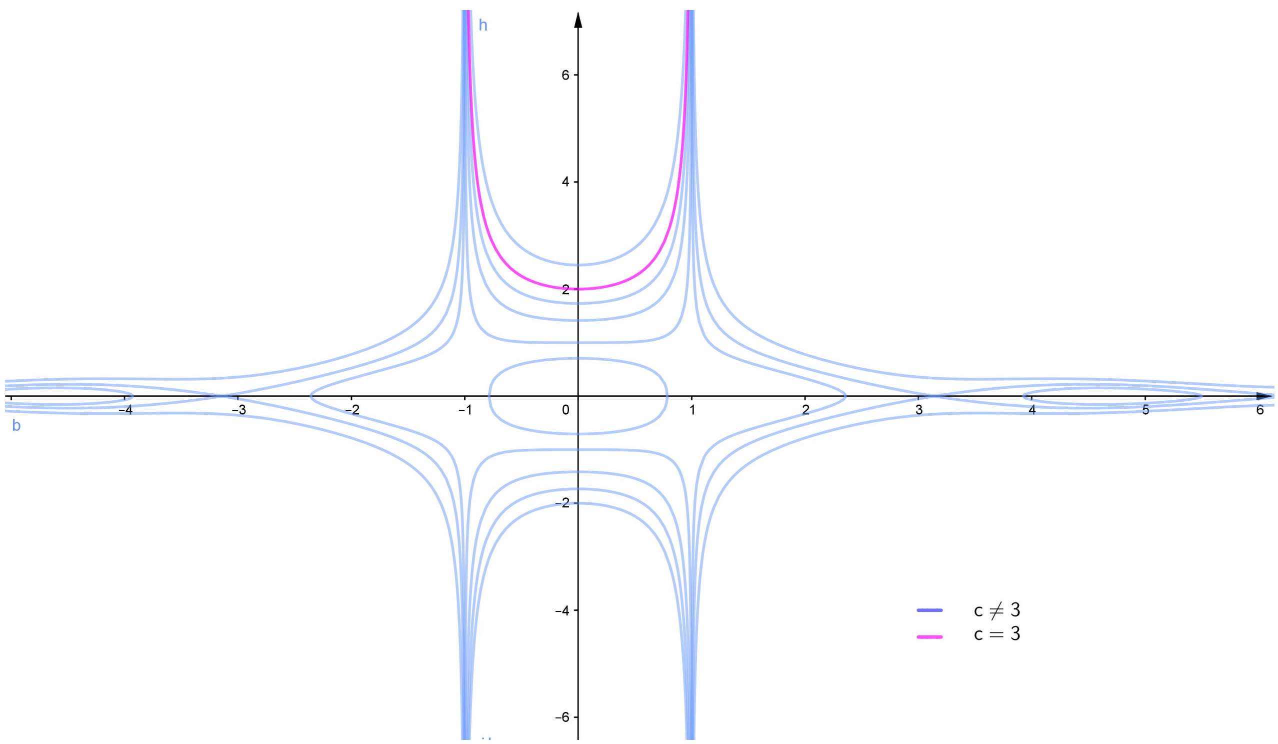
Podríamos haber usado el mismo procedimiento que en el ejercicio anterior? Sí, por supuesto, pero de esta manera no hace falta memorizar fórmulas!

La condición inicial $y(0) = 2$ exige que $4(1 - 0) - \cos^2 0 = 2c$ y, por lo tanto, $2c = 3$. Finalmente, la solución del PVI será

$$y = \sqrt{\frac{3 + \cos^2 x}{1 - x^2}}$$

con dominio de validez en $(-1, 1)$.

Observación: la función $f(x, y) = \dfrac{xy^2 - \cos x \sin x}{y(1 - x^2)}$ (el lado derecho de la ED) no está definida para $x = \pm 1$; por consiguiente, es natural que los dominios de validez de las soluciones estén restringidos a los intervalos $|x| < 1$ y $|x| > 1$. La siguiente figura muestra algunas curvas que pertenen a la familia de soluciones de la ED; se destaca, en particular, la curva solución del PVI.



⋆ ⋆ ⋆

1. Verificar que las siguientes ecuaciones son diferenciales exactas y resolver.

   (a) $(2x - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0$

   (b) $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = 0$

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \dfrac{1}{y}\left(1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0$

(d) $(x^2 - y)\,dx - (x + \sin^2 y)\,dy = 0$

2. Encontrar el valor de b para el cual la ecuación diferencial dada es exacta; luego, resolver usando ese valor de b.

(a) $(xy^2 + bx^2y) + (x+y)x^2\,y' = 0$

(b) $(ye^{2xy} + x) + bxe^{2xy}\,y' = 0$

⋆ ⋆ ⋆

> **Definición.** Una función $\mu(x,y)$ que al multiplicar una ecuación diferencial que no es exacta la convierte en una exacta se denomina **factor integrante.**

Ejemplo 2.

Mostrar que $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2y}$ es un factor integrante para la ecuación diferencial $-y^2\,dx + (x^2+xy)\,dy = 0$.

Observemos primero que

$$\left.\begin{array}{lcl} M(x,y) = -y^2 & \to & \dfrac{\partial M}{\partial y} = -2y \\[2ex] N(x,y) = x^2 + xy & \to & \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x + y \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Luego, la ecuación diferencial no es exacta. Multiplicando cada término de la ecuación diferencial por $\mu(x,y) = \dfrac{1}{x^2y}$ se obtiene

$$-\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{x+y}{xy}\,dy = 0.$$

Para esta ecuación

$$\left.\begin{array}{lcl} \widehat{M}(x,y) = -\dfrac{y}{x^2} & \to & \dfrac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = -\dfrac{1}{x^2} \\[2ex] \widehat{N}(x,y) = \dfrac{x+y}{xy} & \to & \dfrac{\partial \widehat{N}}{\partial x} = -\dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial \widehat{M}}{\partial y} = \frac{\partial \widehat{N}}{\partial x}.$$

Como la nueva ecuación diferencial es exacta, existirá una función $\varphi(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x,y) = \widehat{M}(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) = \widehat{N}(x,y).$$

Procediendo como en el Ejemplo 1, se se obtiene

$$\frac{y}{x} + \ln y = C$$

Observación. En el proceso de multiplicar por un factor integrante, puede ocurrir que se pierdan o se ganen soluciones. En el ejemplo anterior, $y = 0$ es una solución de la ecuación original que se perdió al multiplicar por el factor integrante $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 y}$.

Cómo se calcula un factor integrante?

En teoría, existe un factor integrante para cada ecuación de la forma $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$. Supongamos que $\mu(x, y)$ sea un factor integrante para esta ecuación diferencial con primeras derivadas parciales continuas. Entonces (por definición) debe verificarse

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x, y)\, M(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, y) N(x, y)),$$

de donde se obtiene

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big)\, \mu$$

o, equivalentemente,

$$N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{3}$$

En general, resolver la ecuación (3), que es una ecuación en derivadas parciales, es al menos tan difícil como resolver el problema original. Por lo tanto, aunque en principio los factores integrantes son herramientas poderosas para resolver ecuaciones diferenciales, en la práctica solo se pueden encontrar para ciertos casos especiales.

Las situaciones más importantes en las que se pueden encontrar factores integrantes simples ocurren cuando μ es función de un solo argumento (por ejemplo es sólo función de x, o sólo de y, o sólo de $x \pm y$, o sólo de x/y, ect.). En estos casos, se puede integrar la ecuación (3) sin dificultad e indicar las condiciones bajo las cuales existe un factor integrante del tipo considerado.

Ejemplo 3.

Encontrar un factor integrante para la ecuación diferencial $(2xy^2 - 3y^3)\, dx + (7 - 3xy^2)\, dy = 0$.

Comencemos por comprobar que la ED no es exacta. En este caso,

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = 4xy - 6y^2 \neq 0.$$

Observemos que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{M(x, y)} \Big(\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)\Big) & = \dfrac{4xy - 6y^2}{2xy^2 - 3y^3} = \dfrac{2}{y} \\[2ex] \dfrac{1}{N(x, y)} \Big(\dfrac{\partial}{\partial y} M(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial x} N(x, y)\Big) & = \dfrac{4xy - 6y^2}{7 - 3xy^2}. \end{cases}$$

Dado que uno de estos cocientes solo depende de la variable y, asumiremos que el factor integrante será también una función de y solamente. Imponiendo esta condición en la ecuación (3), obtenemos

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial}{\partial y} M - \dfrac{\partial}{\partial x} N}{M} = -\frac{2}{y} \quad \Longrightarrow \quad \ln|\mu| = -2 \ln|y| + c \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{k}{y^2};\ k = \pm e^c.$$

Ahora, la ecuación diferencial modificada (elegimos $k = 1$, sin pérdida de generalidad) será

$$\underbrace{\frac{2xy^2 - 3y^3}{y^2}}_{\widehat{M}(x,y)}\, dx + \underbrace{\frac{7 - 3xy^2}{y^2}}_{\widehat{N}(x,y)}\, dy = 0.$$

Calculando las derivadas parciales,

$$\frac{\partial}{\partial y}\widehat{M}(x,y) = -3 = \frac{\partial}{\partial x}\widehat{N}(x,y),$$

lo que prueba que es exacta.

Teorema. Si el cociente

$$P = -\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right)$$

es una función solo de la variable y, la ecuación diferencial (1) admitirá un factor integrante que estará dado por

$$\mu(y) = exp\int_{y_0}^{y} P(\eta)\, d\eta.$$

Si, en cambio, el cociente

$$Q = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right)$$

solo depende de la variable x, la ecuación (1) admitirá un factor integrante de la forma

$$\mu(x) = exp\int_{x_0}^{x} Q(\eta)\, d\eta.$$

⋆ ⋆ ⋆

3. La ecuación $x\,dy - y\,dx = 0$ no es exacta.

   (a) Verificar que admite los siguientes factores integrantes y encontrar la diferencial exacta correspondiente en la que se transforma.

      i. $\dfrac{1}{x^2}$

      ii. $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$

      iii. $\dfrac{1}{xy}$

      iv. $\dfrac{1}{x^2 - y^2}$

(b) Verificar que todas las diferenciales exactas halladas en el inciso anterior conducen a la solución general $\dfrac{y}{x} = c$.

Graficar las curvas integrales para distintos valores de c.

4. Compruebe que la ecuación diferencial dada es no exacta. Multiplique la ecuación diferencial por el factor integrante $\mu(x,y)$ indicado y compruebe que la nueva ecuación es exacta. Resuelva.

   (a) $(-xy\sin x + 2y\cos x)\,dx + 2x\cos x\,dy = 0; \quad \mu(x,y) = xy$

   (b) $(2x^2 + e^{-y})\,dx + (x^3 + xy)\,dy = 0; \quad \mu(x,y) = \dfrac{e^y}{x}$

   (c) $(3y^2 - x)\,dx + (2y^3 - 6xy)\,dy = 0; \quad \mu(x,y) = \dfrac{1}{(x+y^2)^3}$

   (d) $(1 - x^2)\,dx + (1+x)^2\,dy = 0; \quad \mu(x,y) = e^{-x+y}$

5. Resolver verificando que admiten factores integrantes de una sola variable.

   (a) $\left(y - \tan y\cos^2 x\right)\,dx + \left(\sin x\cos x - x\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 y}\right)\,dy = 0$

   (b) $(2xy+1)y\,dx + (y-x)\,dy = 0$

   (c) $\sin x - x\cos x - 3x^2(y-x)^2 + 3x^2(y-x)^2 y' = 0$

   (d) $(x^3 + y^3)\,dx - xy^2\,dy = 0$

6. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales sabiendo que admiten un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^\alpha y^\beta$, con α, $\beta \in \mathbb{R}$ constantes a determinar.

   (a) $(y^3 + xy^2 + y)\,dx + (x^3 + x^2y + x)\,dy = 0$

   (b) $(3y^2 + 10xy)\,dx + (5xy + 12x^2)\,dy = 0$

   (c) $(7x^4y - 3y^8)\,dx + (2x^5 - 9xy^7)\,dy = 0$

7. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$ sabiendo que admite un factor integrante de la forma $(x+y)^m$, con $m \in \mathbb{R}$ constante a determinar.

8. Una ecuación diferencial de la forma $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ se dice homogénea si las funciones P y Q son homogéneas del mismo grado. Mostrar que admite un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = \dfrac{1}{xP(x,y) + yQ(x,y)}$ (asumiendo siempre que el denominador no se anula idénticamente).

   El siguiente resultado será de utilidad para resolver este ejercicio: si $F(x,y,z)$ es una función homogénea de grado m, entonces se verifica

   $$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} = mF \qquad \textit{(Teorema de Euler).}$$

9. Resolver la ecuación diferencial $(x^2 + y^2 - xy)\,dx + x^2\,dy = 0$ *(Sugerencia: aplicar el ejercicio anterior).*

10. Suponga que las funciones P y Q satisfacen $\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} = f(x)Q(x,y) - g(y)P(x,y)$. Mostrar, entonces, que la ecuación diferencial $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ admite el factor integrante $\mu(x,y) = e^{\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy}$.

11. Resolver la ecuación diferencial $(2x^2y + y^2)\,dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$ *(Sugerencia: aplicar el ejercicio anterior).*