MATEMÁTICAS ESPECIALES II - 2024
PRÁCTICA 2

Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden y ecuaciones que se reducen a ellas.

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x) \tag{1}$$

se dice que es una **ecuación lineal** en la variable dependiente y. Se asume que las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son continuas en el intervalo donde se busca la solución de (1).

Si $q(x) = 0$, la ecuación (1) se llama **lineal homogénea**; en caso contrario, se llama **lineal no homogénea**. La ecuación lineal homogénea es una ecuación de variables separables; tiene una solución general de la forma

$$y_c(x) = ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

La solución general de la ecuación (1) puede escribirse como la suma de dos soluciones

$$y(x) = y_c(x) + \underbrace{e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx}_{y_p(x)}; \tag{2}$$

la función $y_p(x)$ es una **solución particular** de la ecuación no homogénea (1).

Ejemplo 1.

a) Resuelva la ecuación $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

Observemos primero que $p(x) = 2x$ y $q(x) = 2x\,e^{-x^2}$ son funciones que están definidas y son continuas en $(-\infty, \infty)$.

Comencemos resolviendo la ecuación homogénea asociada; esto es $y' + 2xy = 0$. Separando variables e integrando, obtendremos

$$\frac{1}{y}\,dy = -2x\,dx \Longrightarrow \ln|y| = -x^2 + k \Longrightarrow |y| = e^{k-x^2} \Longrightarrow y = \pm e^k e^{-x^2}; \quad k \in \mathbb{R}.$$

Luego, haciendo $c = \pm e^k$, se tiene $y_c = c\,e^{-x^2}$.

Para hallar la solución particular, tengamos en cuenta que $e^{-\int p(x)\,dx} = e^{-x^2}$. Entonces,

$$y_p = e^{-\int p(x)\,dx} \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx}\, dx = e^{-x^2}\left(\int 2xe^{-x^2}\, e^{x^2}\ dx\right) = x^2e^{-x^2}.$$

Finalmente, la solución general será

$$y = y_c + y_p = (x^2 + c)e^{-x^2}.$$

con dominio de validez en $(-\infty, \infty)$.

b) Resuelva la ecuación $xy' - 4y = x^6 e^x$.

Observemos primero que $p(x) = -\dfrac{4}{x}$ y $q(x) = x^5 e^x$ son funciones que están definidas y son continuas en $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Como siempre resulta tedioso memorizar fórmulas, vamos a presentar un método alternativo (pero completamente equivalente) para hallar la solución general de una EDO lineal de primer orden.

Supongamos que $y = u(x)v(x)$; con u y v funciones derivables a determinar. Reemplazando en la ecuación diferencial se tiene

$$x(u'v + uv') - 4uv = x^6 e^x \Longrightarrow (xu' - 4u)v + xuv' = x^6 e^x \Longrightarrow \begin{cases} xu' - 4u & = 0 \\ \quad xuv' & = x^6 e^x \end{cases}$$

Así, hemos transformado la ecuación original en un sistema de EDOs de primer orden. Resolvemos primero la ecuación homogénea. Separando variables e integrando, se tiene

$$\frac{1}{u}\, du = \frac{4}{x}\, dx \Longrightarrow \ln|u| = 4\ln|x| + k \Longrightarrow |u| = x^4 e^k \Longrightarrow u = \pm e^k\, x^4 \Longrightarrow u = \alpha\, x^4, \quad \alpha = \pm e^k$$

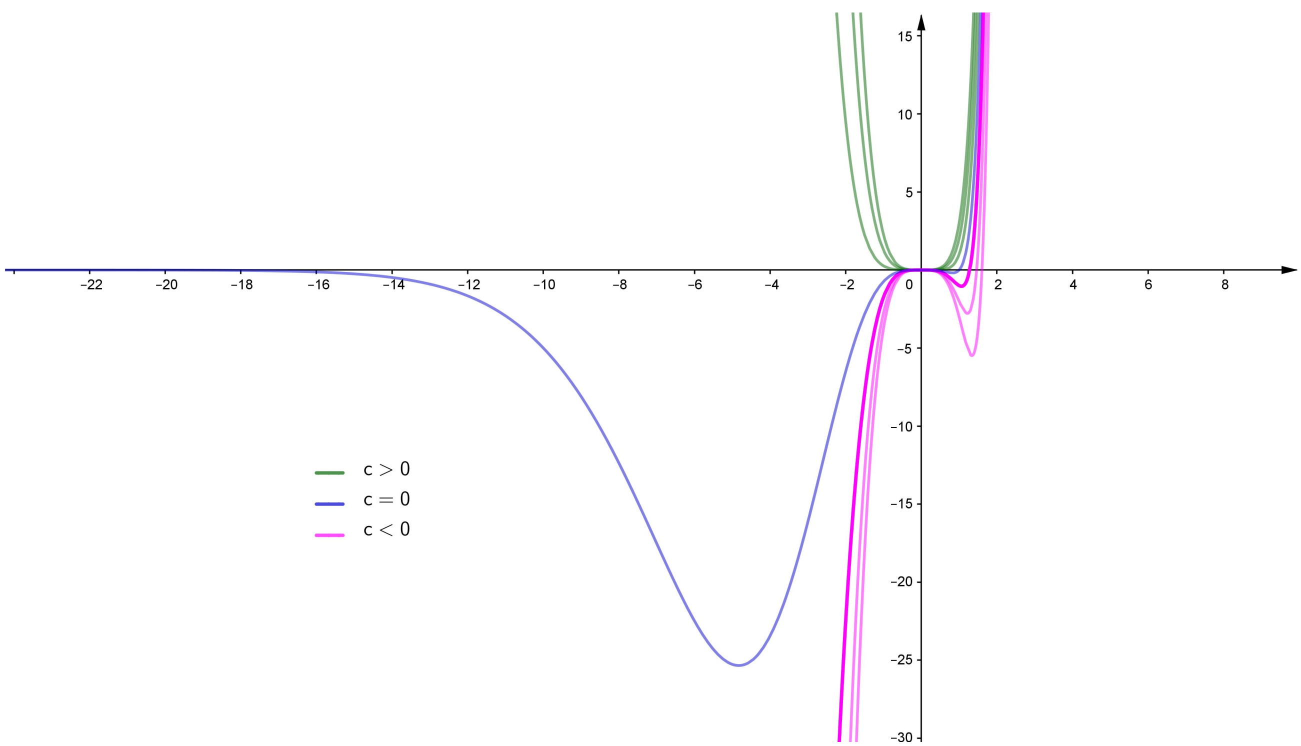
Luego, reemplazando $u = \alpha\, x^4$ en la ecuación no homogénea obtendremos

$$\alpha\, x^5 v' = x^6 e^x \Longrightarrow v' = \frac{1}{\alpha}\, xe^x \Longrightarrow v = \frac{1}{\alpha}(xe^x - e^x + c).$$

Finalmente, la solución general será

$$y = uv = \alpha\, x^4 \cdot \frac{1}{\alpha}(xe^x - e^x + c) = x^5 e^x - x^4 e^x + c\, x^4.$$

con dominio de validez en $(-\infty, \infty)$.



Observación 1: Analizando los cálculos realizados, es evidente que la constante de integración k podría haberse elegido igual a cero sin perder generalidad.

Observación 2: Los valores de x para los que $p(x)$ es discontinua se llaman **puntos singulares** de la ecuación. Los puntos singulares son potencialmente problemáticos.

En el último ejemplo analizado, la ecuación diferencial tiene un punto singular en $x = 0$; los problemas causados por esta singularidad se ponen de manifiesto cuando intentamos dar respuesta a la siguiente pregunta: cuál es la curva solución que pasa por el origen?

⋆ ⋆ ⋆

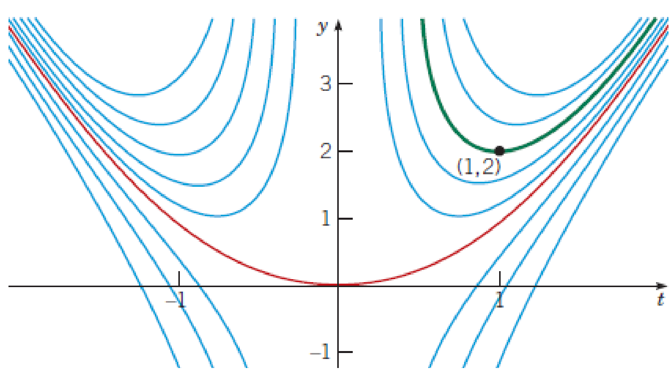
1. Sean a y λ dos constantes positivas y b es un número real cualquiera. Mostrar que toda solución $\varphi(x)$ de la ecuación diferencial $y' + ay = be^{-\lambda x}$ tiene la siguiente propiedad $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$ *(considerar los casos $a = \lambda$ y $a \neq \lambda$ separadamente).*

2. Hallar el valor de y_0 de manera tal que la solución del siguiente PVI $\begin{cases} y' - y = 1 + 3\sin x \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ se mantenga acotada cuando $x \to \infty$.

3. Hallar el valor de y_0 de manera tal que la solución del siguiente PVI $\begin{cases} y' + \dfrac{2}{3}y = 1 - \dfrac{x}{2} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ toque, pero no corte, al eje x.

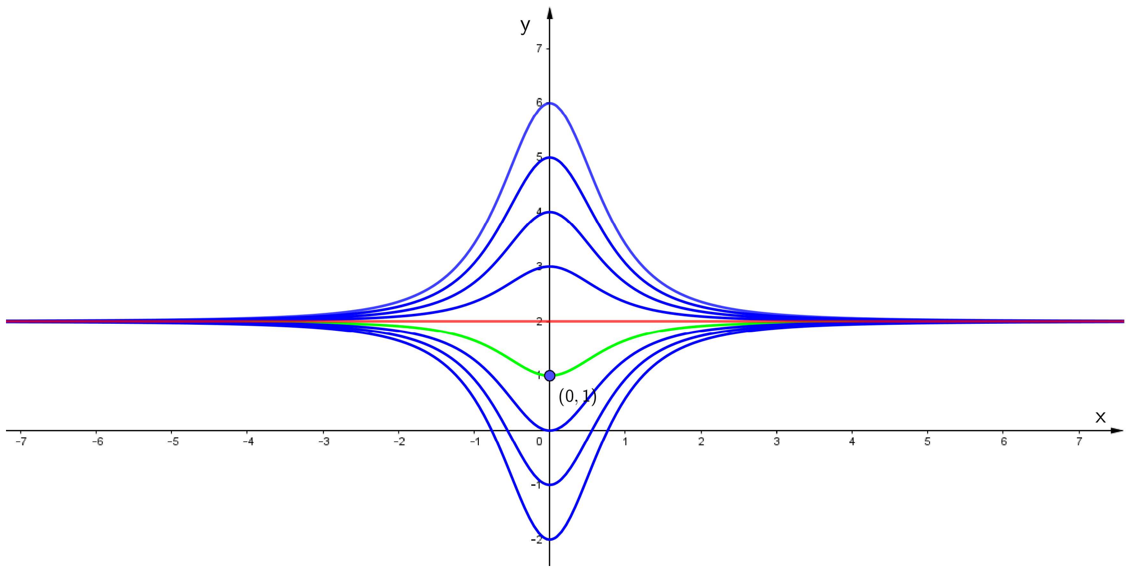
4. Integrar las siguientes ecuaciones lineales.
   (a) $y' - 2\,\dfrac{y}{x+1} = e^x(1+x)^2$
   (b) $(1+x^2)y' + y = \arctan x$
   (c) $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\,y = a,$ considerar los casos $|x| < 1$ y $|x| > 1$

5. En cada uno de los siguientes problemas, hallar la solución particular indicada.
   (a) $y' - 2xy = \cos x - 2x\sin x,$ y acotada cuando $x \to \infty$
   (b) $y' + ye^x = 3e^x,$ $y \to 2$ cuando $x \to -\infty$
   (c) $y' + \dfrac{2}{x}\,y = 4x,$ $y(1) = 2$
   A continuación, se muestran las curvas integrales correspondientes a la ecuación del ejercicio 5c). La curva en rojo es la solución particular correspondiente a $C = 0$. Obsérvese que esta curva separa soluciones que tienen comportamientos bien diferenciados; se denomina *solución crítica* de la ED.



(d) $(1+x^2)y' + 3xy = 6x, \quad y(0) = 1$

A continuación se muestran las curvas integrales correspondientes al ejercicio 5d). Obsérvese que, conforme $x \to \infty$, todas las otras curvas solución se aproximan a la solución particular $y(x) = 2$ que corresponde a $C = 0$. Esta solución constante se conoce como una *solución de equilibrio* de la ED.



(e) $x \ln x \, y' - (1 + \ln x)\, y + \frac{1}{2}(2 + \ln x)\sqrt{x} = 0; \quad y(e) = 1$

⋆ ⋆ ⋆

En muchos problemas (por ejemplo, en problemas de naturaleza geométrica), las variables x e y son absolutamente equivalentes. Por lo tanto, si el problema se reduce a resolver una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{3}$$

suele considerarse también las soluciones del problema asociado

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{4}$$

Si ambos problemas están definidos para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, entonces son problemas idénticos; en efecto, si $y = \varphi(x)$ es una solición de (3), la función inversa $x = \varphi^{-1}(y)$ será solución de (4) y, por lo tanto, ambos problemas tienen el mismo conjunto de curvas integrales. Pero, si en ciertos puntos $f(x, y)$ no estuviera definida, sería natural investigar las soluciones del problema (3) en esos puntos reemplazándolo por el problema (4).

⋆ ⋆ ⋆

6. Resolver

   (a) $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}$

   (b) $y' = \dfrac{y}{2y\ln y + y - x}$

   (c) $y' = \dfrac{1}{x + y\,e^{y}}$

⋆ ⋆ ⋆

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' + p(x)y = q(x)y^n,$$

donde n es cualquier número real, se denominan de Bernoulli en honor del matemático suizo Jacob Bernoulli (1654-1705).

Obsérvese que, para $n = 0$ y $n = 1$, la ecuación se reduce a una ED lineal. Si $n \neq 0$ o $n \neq 1$, el cambio de variable $u = y^{1-n}$ reduce la ecuación de Bernoulli a una ecuación lineal para u.

Ejemplo 2. Hallar la solución de siguiente PVI $\begin{cases} xy' + 6y = 3xy^{4/3}, \\ y(1) = 1/8. \end{cases}$

Observemos que la ecuación diferencial no es de variables separables, ni homogénea, ni lineal, pero es una ecuación de Bernoulli con $n = 4/3$. Entonces, las sustituciones

$$1 - n = -1/3; \quad u = y^{-1/3} \quad \rightarrow \quad y = u^{-3} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -3u^{-4}\frac{du}{dx},$$

la transforman en

$$-3xu^{-4}\frac{du}{dx} + 6u^{-3} = 3xu^{-4} \quad \rightarrow \quad \underbrace{\frac{du}{dx} - \frac{2}{x}u = -1}_{\text{ED lineal}}; \quad x \neq 0.$$

Ahora, podemos usar la expresión (2) para encontrar a $u(x)$. Para esto, tengamos en cuenta que $p(x) = -\dfrac{2}{x}$ y $q(x) = -1$. Es fácil comprobar que

$$e^{\int p(x)\,dx} = \frac{1}{x^2},$$

$$u_c(x) = c\,e^{-\int p(x)\,dx} = c\,x^2,$$

$$u_p(x) = e^{-\int p(x)\,dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}\,dx = x^2\Big(\int -\frac{1}{x^2}\,dx\Big) = x.$$

Finalmente, tendremos

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x) = (x + cx^2) \quad \rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{(x + cx^2)^3}.$$

Para determinar la solución del PVI, será necesario ajustar la constante c de manera tal que se verifique la condición inicial. Haciendo esto, encontramos

$$y_0 = \frac{1}{(x_0 + cx_0^2)^3} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{8} = \frac{1}{(1+c)^3} \qquad \rightarrow \qquad c = 1.$$

Luego,

$$y(x) = \frac{1}{(x+x^2)^3}, \quad \text{con dominio en } (0,\infty).$$

Observación importante: el dominio de $y(x)$ como función real es $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,\infty)$; pero el dominio de $y(x)$ como solución del PVI es $(0,\infty)$.

⋆ ⋆ ⋆

7. Resolver:
   (a) $xy' + y = y^2 \ln x$
   (b) $y' - 4\,\dfrac{y}{x} = x\sqrt{y}$
   (c) $x^2y' - 2xy = 3y^4, \quad y(1) = \frac{1}{2}$
   (d) $xy^2y' + y^3 = x\cos x$

⋆ ⋆ ⋆

La ecuación de Ricatti es una ecuación no lineal de la forma

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2,$$

llamada así en honor del matemático y filósofo italiano Jacobo Francesco Ricatti (1676-1754).

Una ecuación de Riccati se puede resolver por medio de dos sustituciones consecutivas, siempre y cuando se conozca una solución particular, y_p, de la ecuación. La sustitución $y = y_p + u$ reduce la ecuación de Riccati a una ecuación de Bernoulli para u con $n = 2$.

Ejemplo 3. La función $y_p(x) = \dfrac{2}{x}$ es una solución de la ecuación $y' = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{y}{x} + y^2$. Usando esta información, determine la familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial.

Observemos primero que $p(x) = -\dfrac{4}{x^2}$, $q(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $r(x) = 1$ están definidas y son continuas en $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

Como la ecuación diferencial es de Riccati, hacemos $y(x) = \dfrac{2}{x} + u(x)$ y sustituimos en la ecuación diferencial para obtener

$$-\frac{2}{x^2} + u' = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x}+u\right) + \left(\frac{2}{x}+u\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{u' = \frac{3}{x}u + u^2}_{\text{ED de Bernoulli con } n=2} \quad .$$

Ahora, para resolver la ecuación de Bernoulli, hacemos $v = u^{1-2} = \dfrac{1}{u} \Rightarrow u = \dfrac{1}{v}$ y susitituimos en la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de u. Haciendo esto, tendremos

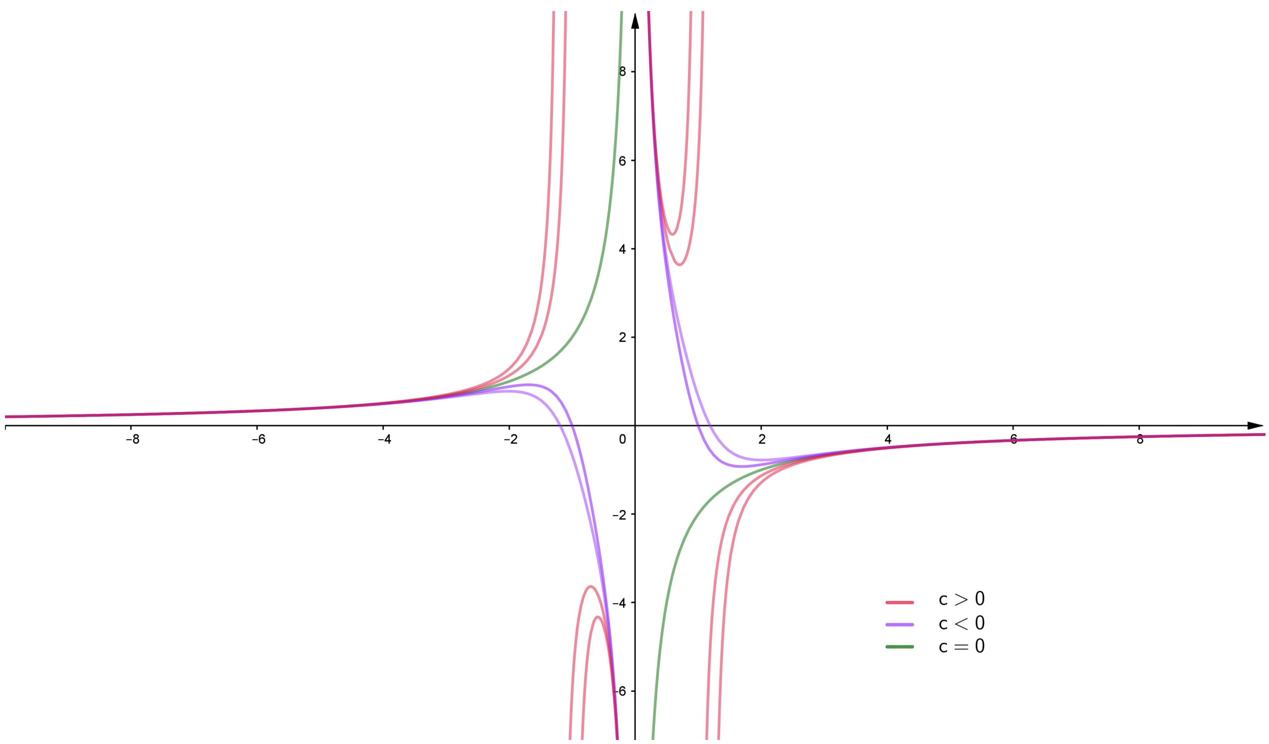
$$-\frac{1}{v^2}\,v' = \frac{3}{x}\frac{1}{v} + \frac{1}{v^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \underbrace{v' = -\frac{3}{x}\,v - 1}_{\text{ED lineal}}\,.$$

Para resolver la ecuación lineal, escribimos $v = z(x)w(x)$ y reemplazmos la ecuación diferencial por el sistema de escuaciones

$$\begin{cases} z' + \dfrac{3}{x}\,z & = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{x^3} \\ zw' & = -1 \Rightarrow w' = -x^3 \Rightarrow w = -\dfrac{x^4}{4} + c \end{cases} \qquad \Rightarrow v = \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^4}{4} + c\right) = -\frac{x}{4} + \frac{c}{x^3} = \frac{4c - x^4}{4x^3}.$$

Finalmente, $y(x) = y_p(x) + u(x) = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{v(x)} = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4x^3}{4c - x^4}$.

En la siguiente figura, se muestran las correspondientes curvas integrales para distintos valores de la constante c.



⋆ ⋆ ⋆

8. Comprobar que y_p es una solución particular y resolver.

   (a) $y' = 2 - 2x\,y + y^2, \qquad y_p(x) = 2x$

(b) $y' = e^{2x} + (1 + 2e^x)\, y + y^2, \qquad y_p(x) = -e^x$

(c) $y' = 2x^2 + \dfrac{1}{x}\, y - 2y^2, \qquad y_p(x) = x$

Comentario: la solución de una EDO podría quedar expresada en términos de una integral no elemental; en ese caso, no intente resolver la integral.