MATEMÁTICAS ESPECIALES II - 2024

PRÁCTICA 0

Conceptos fundamentales

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita.

Clasificaremos a las ecuaciones diferenciales por **tipo, orden** y **linealidad**.

Si la función incógnita es de una variable la ecuación se llama **ordinaria (EDO)**; si es de varias variables, la ecuación es **en derivadas parciales (EDP)**.

Ejemplo 1.

- Ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$
$$y'' + y' + x = \cos x$$
$$(x^2 + y^2)\, dx + (x - y)\, dy = 0$$

- Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2t\,\frac{\partial u}{\partial t}$$
$$u_x + y\, u_y = 0$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{xy}$$

Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella.

Ejemplo 2.

$4x^2y' + y = x$ es una EDO de primer orden

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\Big(\dfrac{\partial u}{\partial y}\Big)^3 - 4y = e^{-x}$ es una EDP de segundo orden

Una ecuación diferencial es **lineal** cuando las funciones incógnitas y sus derivadas solo aparecen como polinomios de grado uno.

Ejemplo 3.

$y''' + xy' - 5y = e^x$ es una EDO lineal de tercer orden

$(1-y)y' + 2y = \sin x$ es una EDO no lineal de primer orden

$y'' + x \sin y = 0$ es una EDO no lineal de segundo orden

$\dfrac{d^4 y}{dx^4} + y^2 = 0$ es una EDO no lineal de cuarto orden

> Se llama **solución** de una EDO de orden n a una función $\varphi(x)$, definida en un intervalo I junto con sus derivadas sucesivas hasta el orden n inclusive; tal que, al hacer la sustitución $y = \varphi(x)$ en la ecuación diferencial, esta se convierte en una identidad para todo x en el intervalo I. El intervalo I se conoce como **intervalo de definición, intervalo de existencia, intervalo de validez** o **dominio de la solución**.

Ejemplo 4.

- La función $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + y = 0$ en el intervalo $(0, \infty)$.

  En efecto, $\varphi(x)$ está definida y es derivable en $(0, \infty)$ y verifica

$$x\varphi'(x) + \varphi(x) = x\,(-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{x} = 0 \quad \forall x \in (0, \infty).$$

- La función $\varphi(x) = x + 4\sqrt{x+2}$ es solución de la ecuación diferencial $(y-x)y' = y - x + 8$ en el intervalo $(-2, \infty)$.

  En efecto, $\varphi(x)$ está definida en $[-2, \infty)$ y es derivable en $(-2, \infty)$ y verifica

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{lado izquierdo de la EDO}: & (\varphi(x)-x)\varphi'(x) = (x+4\sqrt{x+2}-x)(1+\dfrac{4}{2\sqrt{x+2}}) = 8+4\sqrt{x+2} \\ \text{lado derecho de la EDO}: & \varphi(x)-x+8 = x+4\sqrt{x+2}-x+8 = 8+4\sqrt{x+2} \end{array}}_{\text{son iguales } \forall x\in(-2,\infty)}$$

- La función $\varphi(x)$ definida implícitamente por la relación $e^{-\varphi(x)} + x = 1$ es solución de la ecuación diferencial $xy' + 1 = e^y$ en el intervalo $(-\infty, 1)$.

  En efecto, si $x \in (-\infty, 1)$, $\varphi(x) = -\ln(1-x)$. Luego,

$$\underbrace{\begin{array}{ll} \text{lado izquierdo de la EDO}: & x\varphi'(x) + 1 = x\dfrac{1}{1-x} + 1 = \dfrac{1}{1-x} \\ \text{lado derecho de la EDO}: & e^{\varphi(x)} = \dfrac{1}{1-x} \end{array}}_{\text{son iguales } \forall x\in(-\infty,1)}$$

⋆ ⋆ ⋆

1. Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales.

   (a) $(1-x)y'' + 4xy' - 5y = \cos x$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

   (c) $u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = F(x,y)$ $\quad$ ($k > 0$ es constante, $F(x,y)$ es dato)

   (d) $u_x + u_y = 1$

   (e) $y'' + y' + y = \cos(x+y)$

2. Compruebe que la función indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

   (a) $\varphi(x) = \dfrac{\sin x}{x}; \qquad xy' + y = \cos x$

   (b) $\varphi(x) = x\sqrt{1-x^2}; \qquad yy' = x - 2x^3$

   (c) $\varphi(x) = e^{-x^2}\left(1 + \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\right); \qquad y' + 2xy = 1$

   (d) $\varphi(x) = e^{3x}\cos(2x); \qquad y'' - 6y' + 13y = 0$

   (e) $\varphi(x) = \dfrac{1}{4-x^2}; \qquad y' = 2xy^2$

   (f) $\varphi(x) = (2 - \ln x)\sqrt{x}; \qquad 4x^2y'' + y = 0$

3. Compruebe que la función definida por tramos $\varphi(x) = \begin{cases} e^x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ es una solución de la ecuación diferencial $y' = |y| + 1$ en $(-\infty, \infty)$.

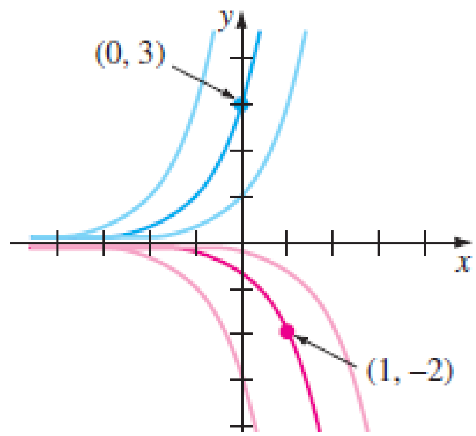
⋆ ⋆ ⋆

Se llama **solución general** de la ecuación diferencial $y' = f(x,y)$ a una función $y = \varphi(x,C)$ que depende de una constante arbitraria C y que satisface la ecuación diferencial para cualquier valor de la constante C. Se llama **solución particular** a la que se obtiene de la solución general asignándole un valor determinado a la constante C.

Ejemplo 5.

La función $y = Ce^x$ es la solución general de la ecuación diferencial de primer orden $y' - y = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$ para todo C real. En particular, eligiendo

* $C = 3$, obtenemos la solución $y = 3e^x$ que pasa por el punto $(0,3)$,
* $C = -2e^{-1}$, obtenemos la solución $y = -2e^{x-1}$, que pasa por el punto $(1,-2)$.



Geométricamente, la solución general $y = Ce^x$ determina una familia de curvas en el plano (la familia es infinita ya hay una curva para cada valor real de la constante C); se denominan *curvas integrales*. La solución particular $y = 3e^x$ es la curva integral que pasa por el punto de coordenadas $(0, 3)$.

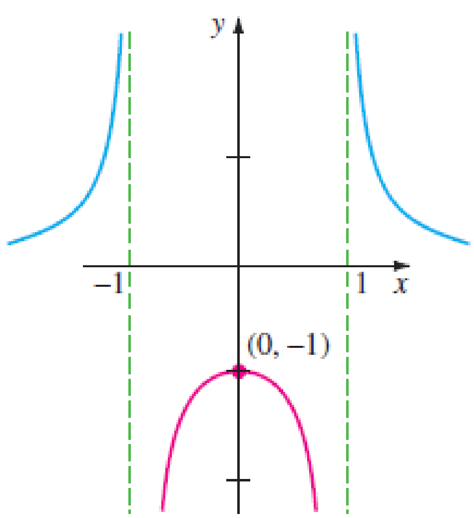
El problema de encontrar la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ sujeta a la condición $y(x_0) = y_0$ se denomina **Problema de valores iniciales** (PVI).

Ejemplo 6.

La función $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ es la solución del PVI $\begin{cases} y' + 2xy^2 = 0 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ en el intervalo $(-1, 1)$.

En efecto, $\varphi(x)$ está definida y es derivable para todo x en $(-1, 1)$; el intervalo $(-1, 1)$ contiene al punto inicial $x_0 = 0$; $\varphi(0) = -1$ y

$$\varphi'(x) + 2x(\varphi(x))^2 = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} + 2x\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 = 0.$$



⋆ ⋆ ⋆

4. Compruebe que la familia de funciones indicada es una solución de la ecuación diferencial dada. Suponga un intervalo I de definición adecuado para cada solución.

   (a) $\varphi(x,c) = \dfrac{ce^x}{1+ce^x}$; $\qquad y' = y(1-y)$
   (b) $\varphi(x,c) = \dfrac{c}{\cos x}$; $\qquad y' - \tan x \cdot y = 0$
   (c) $\varphi(x,c) = x(c - \ln|x|)$; $\qquad xy' - y = -x$
   (d) $\varphi(x,c) = cx - x\cos x$; $\qquad xy' - y = x^2 \sin x$
   (e) $\varphi(x,c_1,c_2) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}$; $\qquad y'' - 4y' + 4y = 0$

   En cada caso, grafique las curvas integrales para distintos valores de c.

5. La función $\varphi(x,c) = \dfrac{1}{1-ce^{-x}}$ es una familia de soluciones (de un parámetro) de la ED de primer orden $y' = y - y^2$. Defina un PVI asociado a esta ecuación diferencial y encuentre la solución correspondiente a la condición inicial

   (a) $y(0) = -1/3$
   (b) $y(-1) = 2$

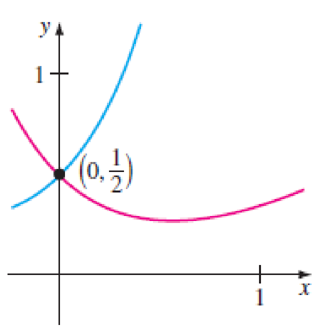
   Graficar las soluciones halladas.

6. Verificar primero que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial dada. Después determinar un valor de la constante C tal que $y(x)$ satisfaga la condición inicial dada.

   (a) $y' = 3x^2(y^2+1)$; $\quad y(x) = \tan(x^3 + C)$; $\quad y(0) = 1$
   (b) $y' + y\,\tan x = \cos x$; $\quad y(x) = (x + C)\cos x$; $\quad y(\pi) = 0$
   (c) $xy' - 3y = x^3$; $\quad y(x) = x^3(C + \ln x)$; $\quad y(1) = 17$

   Graficar las soluciones halladas.

7. Considere el PVI $\begin{cases} y' = x - 2y \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$. Determine cuál de las curvas que se muestran en la siguiente figura es la única solución posible. Explique su razonamineto.



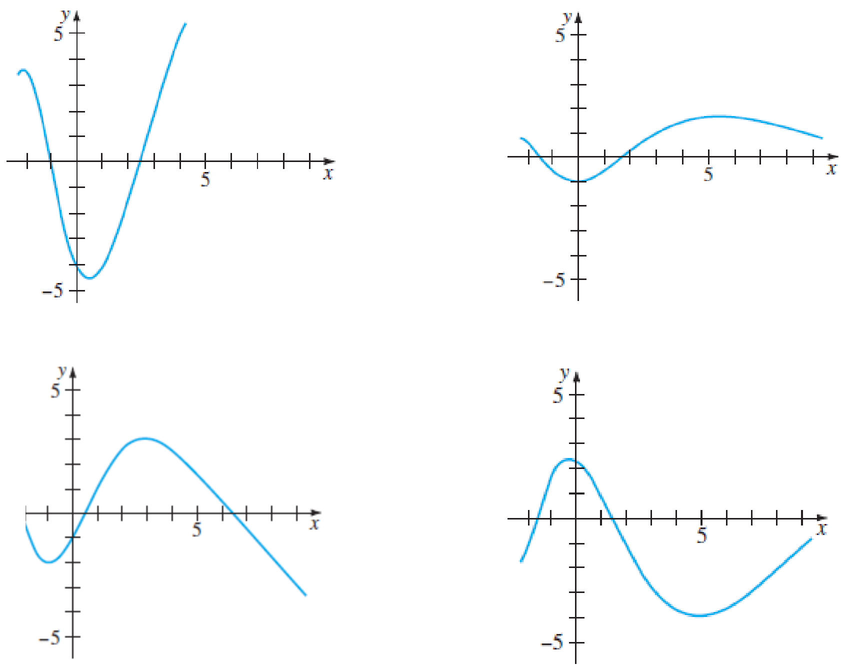
8. La función $\varphi(x, c_1, c_2) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ es una familia de soluciones (de dos parámetros) de la ED de segundo orden $y'' - y = 0$. Defina un PVI asociado a esta ecuación diferencial y encuentre la solución correspondiente a las condiciones iniciales

   (a) $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$

   (b) $y(-1) = 5$; $y'(-1) = 1$

   Graficar las soluciones halladas.

9. Las gráficas muestran soluciones particulares de la EDO de segundo orden $y'' = f(x, y, y')$.



   Relacione cada solución con al menos un par de las siguientes condiciones iniciales.

(a) $y(1) = 1$; $y'(1) = -2$	(b) $y(-1) = 0$; $y'(-1) = -4$	(c) $y(1) = 1$; $y'(1) = 2$
(d) $y(0) = -1$; $y'(0) = 2$	(e) $y(0) = -1$; $y'(0) = 0$	(f) $y(0) = -4$; $y'(0) = -2$

10. Una función $g(x)$ se describe por alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $y'(x) = f(x, y)$ que tenga a la función $g(x)$ como su solución (o como una de sus soluciones) en los siguientes casos:

   (a) la pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es igual a la suma de x y de y,

   (b) la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) corta al eje de las x en el punto $(x/2, 0)$,

   (c) la recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) pasa a través del punto $(-y, x)$,

   (d) todas las rectas normales a la gráfica de g pasan a través del punto $(0, 1)$ (cómo sería la gráfica de la función g?).

⋆ ⋆ ⋆

La ecuación diferencial

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

determina en cada punto (x, y) (en el que $f(x, y)$ está definida) el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva solución o integral en ese punto.

Luego, podemos asociar a cada punto (x, y) del plano un segmento de pendiente $f(x, y)$; es decir, un vector (unitario) de coordenadas

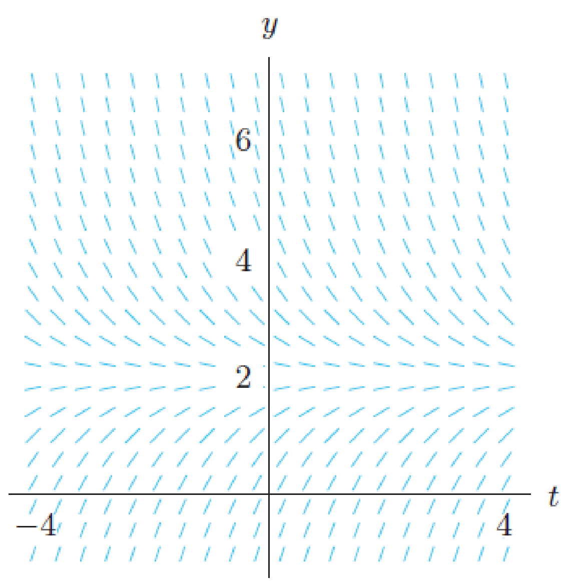
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (f(x,y))^2}}, \frac{f(x,y)}{\sqrt{1 + (f(x,y))^2}} \right). \tag{2}$$

A este conjunto de vectores se lo denomina **campo de direcciones** correspondiente a la ecuación diferencial (1). Una vez dibujado dicho campo (lo que se puede hacer sin resolver la ecuación diferencial), las soluciones de (1) serán las curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones.

El campo de direcciones asociado a una EDO nos permite inferir propiedades cualitativas de sus soluciones (por ejemplo, si son asintóticas a una recta, si son cerradas o abiertas, etc.).

Ejemplo 7.

El campo de direcciones correspondiente a la ecuación diferencial $y' = 2 - y$ se muestra en la figura siguiente.



En este caso, cada vector unitario viene dado por (ver (2)):

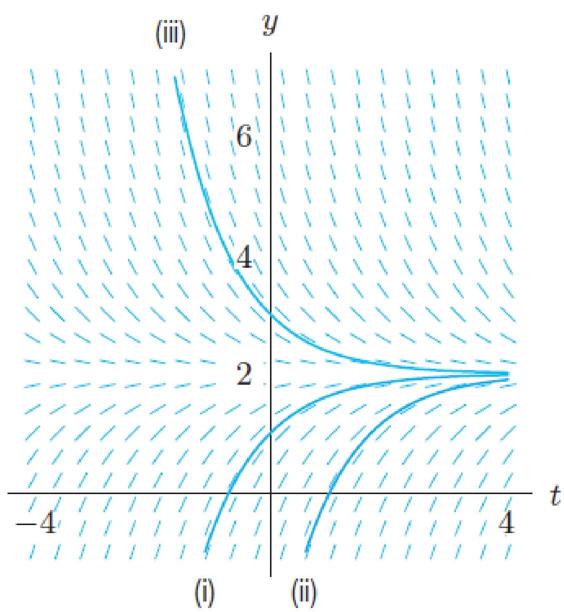
$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2-y)^2}}, \frac{2-y}{\sqrt{1+(2-y)^2}}\right) \quad \rightarrow \quad \begin{cases} y=3 & \rightarrow \ (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \\ y=2 & \rightarrow \ (1,0) \\ y=1 & \rightarrow \ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ y=-1 & \rightarrow \ (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}) \end{cases}$$

Observemos que

- sobre cada linea horizontal (donde y es constante) las pendientes son constantes; esto es así porque y' depende de y solamente,
- la recta $y = 2$ divide la plano en dos regiones; en cada una de estas regiones la derivada y' tiene el mismo signo (las curvas integrales serán crecientes si $y < 2$ y decrecientes si $y > 2$),
- la ecuación diferencial también brinda información sobre la concavidad de las curvas integrales; en efecto, derivando se tiene $y'' = 0 - y' = -(2 - y)$, por lo tanto, las curvas integrales serán cóncavas hacia arriba si $y > 2$ y cóncavas hacia abajo si $y < 2$.

En la figura siguiente se muestra un bosquejo de las curvas integrales que pasan por los puntos

i) $(0,1)$ ii) $(1,0)$ iii) $(0,3)$

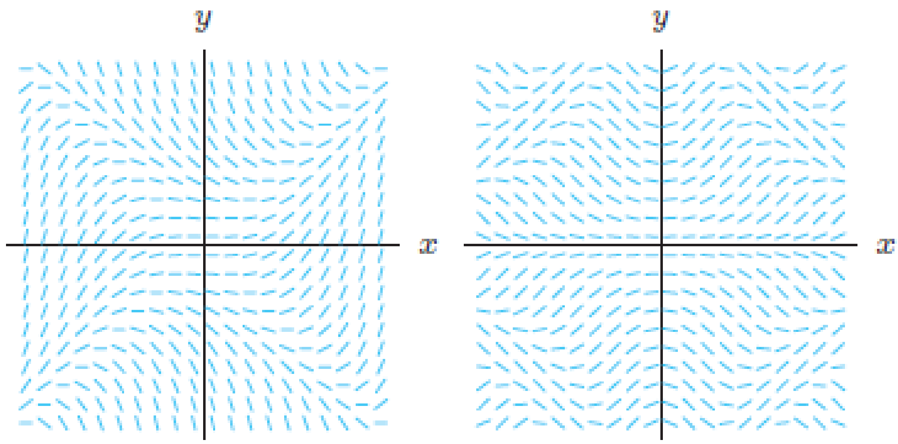


Observemos también que

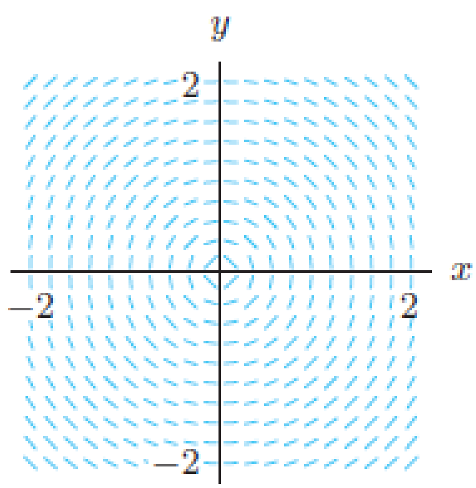
- todas las curvas integrales tienen a $y = 2$ como asíntota horizontal; por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 2$.

⋆ ⋆ ⋆

11. En la siguiente figura se muestran dos campos de direcciones; cuál de ellos corresponde a la ED $y' = x^2 - y^2$? Ubique en el gráfico a los puntos $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ y haga un bosquejo de la curva integral que pasa por el punto $(0,1)$ hasta que interseca a la recta $x = 2$.



12. En la siguiente figura se muestra el campo de direcciones correspondiente a la ED $y' = -\dfrac{x}{y}$. Haga un bosquejo de algunas curvas integrales; estarán representadas por una única función?



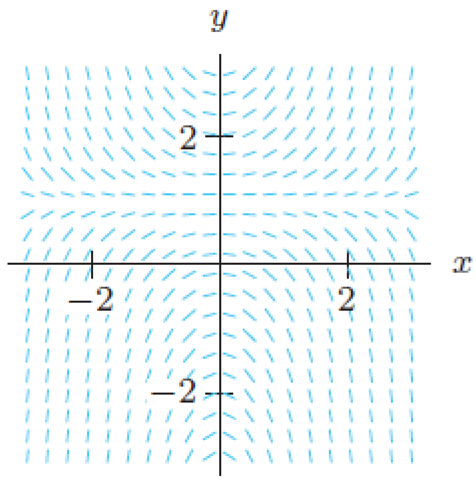
13. El campo de direcciones correspondiemte a la ED $y' = x(y-1)$ se muestra en la figura siguiente.

   (a) Haga un bosquejo de las curvas integrales que pasan por los puntos

   i) $(0,0)$ ii) $(0,1)$ iii) $(0,-1)$

   (b) A partir de los bosquejos, proponga una expresión para la curva integral que pasa por el punto $(0,1)$.

   (c) Chequee la propuesta del inciso anterior reemplazándola en la ecuación diferencial.



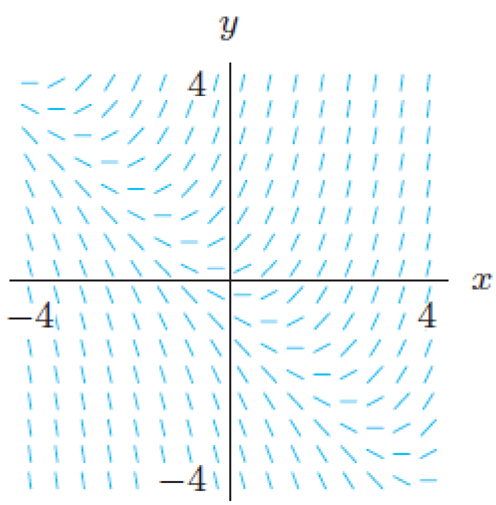
14. El campo de direcciones correspondiemte a la ED $y' = x + y$ se muestra en la figura siguiente.

    (a) Haga un bosquejo de las curvas integrales que pasan por los puntos

    i) $(0,0)$ ii) $(-3,1)$ iii) $(-1,0)$

    (b) A partir de los bosquejos, proponga una expresión para la curva integral que pasa por el punto $(-1,0)$.

    (c) Chequee la propuesta del inciso anterior reemplazándola en la ecuación diferencial.



⋆ ⋆ ⋆

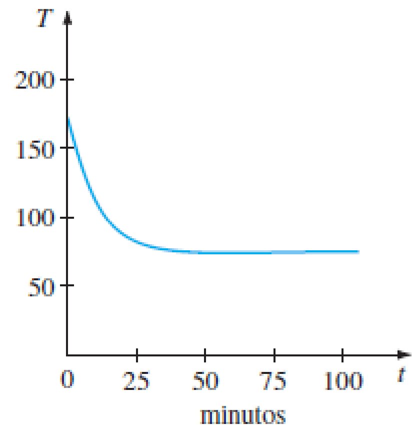
Por siglos las ecuaciones diferenciales han ocupado los esfuerzos de científicos para describir algún fenómeno físico o para traducir una ley empírica o experimental en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema de fenómenos se llama **modelo matemático**.

⋆ ⋆ ⋆

15. De acuerdo con la ley de enfriamiento/calentamiento de Newton, la rapidez con la que cambia la temperatura de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la del medio que lo rodea o temperatura ambiente.

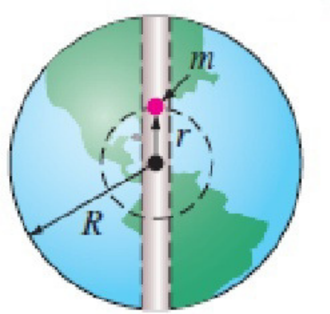
    (a) Si $T(t)$ representa la temperatura del cuerpo al tiempo t y T_m es la temperatura ambiente, determine una ecuación diferencial que traduzca matemáticamente la ley de Newton.

    (b) En la gráfica se muestra la variación con el tiempo de la temperatura $T(t)$ de una taza de café que se enfría de acuerdo con la ley de Newton.



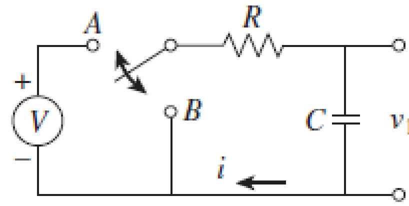
Utilice estos datos para ajustar las constantes de la EDO que gobierna este proceso y para determinar T_0, la temperatura en el momento en que se sirve el café ($t = 0$). Luego, defina el PVI correspondiente.

16. Suponga que se hace un agujero que pasa por el centro de la Tierra y que por él se deja caer una bola de masa m como se muestra en la figura. Construya un modelo matemático que describa el posible movimiento de la bola.



El túnel está excavado de polo a polo de manera que la rotación de la Tierra no influye sobre el movimiento.

17. En la figura se muestra un circuito con una resistencia y un capacitor. El voltaje de la batera V es constante y el capacitor está inicialmente descargado. Al inicio, el interruptor está cerrado en el punto B. En $t = 0$, el interruptor se mueve repentinamente del punto B al punto A. Obtenga el modelo de ecuación diferencial para el voltaje del capacitor V_I en función del tiempo.



18. Suponga que cuando la curva plana C que se muestra en la figura se gira respecto al eje x genera una superficie de revolución con la siguiente propiedad: todos los rayos de luz paralelos al eje x que inciden en ella son reflejados a un solo punto O (el origen). Utilice el hecho de que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión para determinar una ecuación diferencial que describa la forma de la curva C. *Esta curva C es importante en aplicaciones como construcción de telescopios o antenas de satélites, faros delanteros de automóviles y colectores solares.*