ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)
TRABAJO PRÁCTICO 7: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ejercicio 1. Resolver las siguientes ecuaciones utilizando propiedades de las funciones logaritmo y exponencial:

a) $e^{x+7} = \dfrac{1}{e^2}$

b) $4.3^{x+1} = 12$

c) $\ln(x^2 - 4x - 4) = 0$

d) $\ln(x^2 + x) - \ln(x) = \ln(5)$

e) $2^{x+1} + 2^x = 12$

f) $2.49^x + 5.7^{x+1} = 37$

g) $\log_6(x-1) = 3 - \log_6(5x+1)$

Ayuda: Recordar que $e^{\ln(x)} = x$ para $x > 0$ y $\ln(e^x) = x$ para todo x real.

Ejercicio 2. Explicitar el dominio de definición y de derivabilidad de las siguientes funciones y dar una expresión para la derivada.

a) $f(x) = e^{\ln(7)x}$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

d) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

e) $f(x) = x \ln x$

f) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

g) $f(x) = 2^x - x^2$

h) $f(x) = \cos(e^{x^2})$

Ejercicio 3. Demostrar que si $f(x) = xe^x$ entonces $f^n(x) = (x+n)e^x$ para todo $n \geq 0$. Ayuda: utilizar inducción sobre n.

Ejercicio 4. Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(3x+1) & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ e^x - x - 1 & x > 0 \end{cases}$$

a) Analizar la continuidad y clasificar las discontinuidades.

b) Determinar el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la derivada de cada una de las funciones.

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3e^{x+1} - x$ paralela a la recta de ecuación $y = 2x + 1$.

Ejercicio 6. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $g(x) = x \ln x$ perpendicular a la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 7$.

Ejercicio 7. Sea f una función continua en $[1, 2]$, derivable en $(1, 2)$ tal que $f(1) = f(2)$ y positiva en todo su dominio. Definamos $G(x) = \ln(f(x)) + x$.

a) Demostrar que existe un $c \in (1, 2)$ tal que $G'(c) = 1$.

b) Calcular $f'(c)$.

Ayuda: Utilizar el Teorema del valor medio

Ejercicio 8. Explicitar el dominio de definición y de derivabilidad de las siguientes funciones y dar una expresión para la derivada.
Ayuda: para derivar usar derivación logaritmica.

a) $f(x) = (x + 1)^{(x+2)}$

b) $f(x) = x^{\operatorname{sen}(x)}$

c) $f(t) = t^{\sqrt{t}}$

d) $f(x) = (ln(x))^{ln(x)}$

e) $f(x) = (\tan(x))^{x^2+1}$

Ejercicio 9. Hallar los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln(x)$, n natural

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1 + e^x) - x$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{4}{x}\right)^{-x}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{x}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)^{x/2}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$, $a > 0$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 + 2\ln(x)}{2^x + \sqrt{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{tg(x)}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} xe^{1/x}$

Ayuda: Recordar los siguientes límites (los dos primeros determinados por orden de magnitud)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^r} = +\infty$, para $r > 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^r}{\ln(x)} = +\infty$, para $r > 0$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

- $\lim_{x \to 0} \left(1 + x\right)^{\frac{1}{x}} = e$

Ejercicio 10. Hallar las asíntotas verticales y horizontales a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - e^{\frac{1}{x}}\, x^2$.

Ejercicio 11. Probar las siguientes desigualdades:

a) $1 + x < e^x$, para $x > 0$.

b) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ si $x \geq 0$.

c) $2\ln(x) \leq \dfrac{x^2 - 1}{x}$ si $x \geq 1$.

Ayuda: Notar que si una función f es estrictamente creciente y $f(a) \geq 0$ entonces $f(x) > 0$ para todo $x > a$. Análogamente, si f es estrictamente decreciente y $f(a) \leq 0$ entonces $f(x) < 0$ para todo $x > a$.

Ejercicio 12. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = \cosh(x) + 2$ paralela a la recta de ecuación $y = \frac{3}{4}x - 2$.

Ejercicio 13. Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en el intervalo dado:

a) $f(x) = \cosh(x)$ en $[-1, 1]$

b) $g(x) = \mathrm{senh}(x) - x$ en $[-1, 1]$

Ejercicios adicionales. Crecimiento Exponencial.

Ejercicio 14. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia presente en un instante dado, digamos $f(t) = Ce^{Kt}$.

a) ¿En qué instante habrá exactamente la mitad de la cantidad original presente?

b) Suponer que $K = -4$. ¿En qué instante habrá un tercio de la substancia?

Ejercicio 15. En 1900, la población de una ciudad fue de 50.000 habitantes. En 1950 fue de 100.000. Si la razón de crecimiento de la población es proporcional a la población, ¿cuál será la población en 1984? ¿En qué año será de 200.000?

Ejercicio 16. La población de cierta ciudad se duplica cada 10 años y en 1940 tenía 100.000 habitantes.

a) Determinar la población en 1980.

b) Expresar la población en función del tiempo (en años).

c) Dibujar la curva de población. ¿La población, crece o decrece con respecto al tiempo?

Ejercicio 17. Sean f una función definida en algún intervalo de la recta real, K una constante y supongamos que $f'(t) = Kf(t)$ en el intervalo mencionado. Probar que existe una constante C tal que $f(t) = Ce^{Kt}$.

Ayuda: Considerar la función $F(t) = \dfrac{f(t)}{e^{Kt}}$ y mostrar que $F'(t) = 0$. Luego podemos asegurar que existe una constante C tal que $F(t) = C$. Por lo tanto se deduce que $f(t) = Ce^{Kt}$.