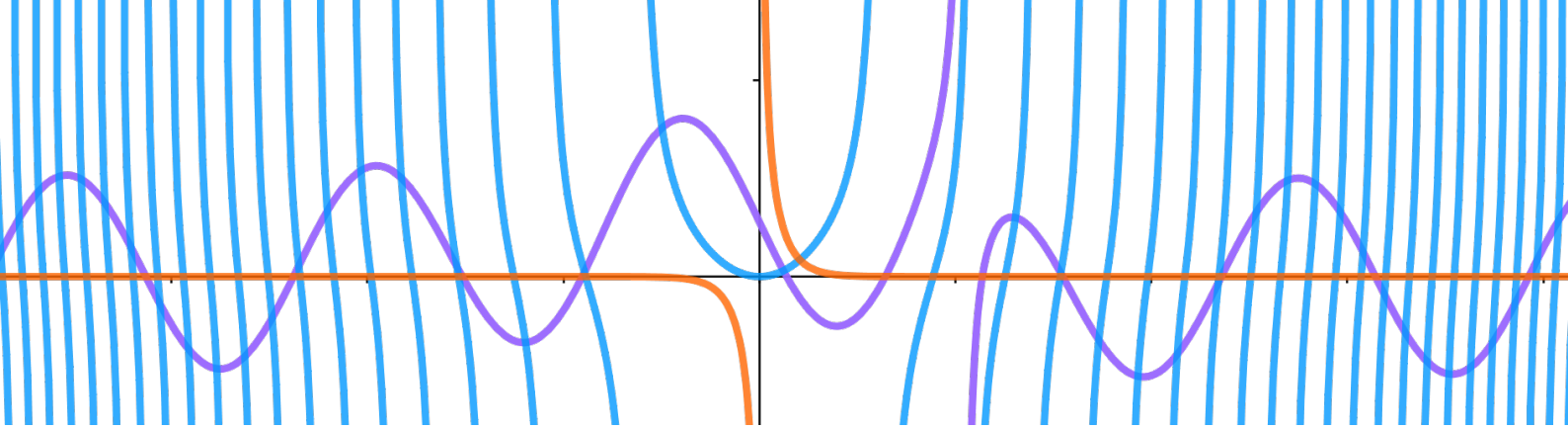

Práctica 11

Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas

1. Hallar las funciones primitivas:
   a) $\int \cos^3 x\,dx$ (sugerencia: escribir $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x\,(1-\operatorname{sen}^2 x)$).
   b) $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$ (sugerencia: escribir $\cos^2 x$ en función del seno de x).
   c) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$ (sugerencia: usar que $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ y $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$).
   d) $\int \operatorname{sen}^4 x\,dx$ (sugerencia: escribir $\operatorname{sen}^4 x = \operatorname{sen}^3 x \operatorname{sen} x$ e integrar por partes considerando $u(x) = \operatorname{sen}^3 x$ y $v'(x) = \operatorname{sen} x$).
   e) $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(2x)\,dx$ (sugerencia: escribir $\operatorname{sen}(5x)$ y $\operatorname{sen} x$ en función del seno y del coseno de $2x$ y $3x$).
   f) $\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$ (sugerencia: escribir $x = 2t$).
2. Resolver las siguientes integrales utilizando identidades trigonométricas e hiperbólicas:

   a) $\int \operatorname{senh}^3 x\,dx$
   b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$
   c) $\int \cos^4 x\,dx$
   d) $\int \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}\,dx$
   e) $\int \operatorname{sen}(3x)\cos(5x)\,dx$
   f) $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$
   g) $\int \sqrt{1+\cos x}\,dx$
   h) $\int \cosh^4 x\,dx$

Sustituciones trigonométricas e hiperbólicas

3. Resolver las siguientes integrales:
   a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ (sugerencia: utilizar la sustitución $x = \operatorname{sen} t$).
   b) $\int_{0}^{3/4} \sqrt{1+x^2}\,dx$ (sugerencia: utilizar la sustitución $x = \operatorname{senh} t$).
   c) $\int_{1}^{17/8} \sqrt{x^2-1}\,dx$ (sugerencia: utilizar la sustitución $x = \cosh t$).
4. Resolver utilizando sustituciones trigonométricas e hiperbólicas, cuando sea necesario:

a) $\displaystyle\int_4^{20/3} \sqrt{x^2-16}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-25/2}^0 \sqrt{5+x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

f) $\displaystyle\int_2^{10/3} \sqrt{4x^2-1}\,dx$

g) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{9x^2+1}}\,dx$

Aplicaciones de la integral

5. Calcular el área comprendida entre las gráficas de:
   a) $y=x,$ e $y=x^3$.
   b) $y=xe^x$ e $y=2x$.
   c) $x=3-y^2$ y $x=y+1$.
   d) $y=\sin(x)$ y $y=\cos(x)$ entre $[0,\pi/2]$.
6. Sean $f(x)=x-x^2$ y $g(x)=ax$. Determinar el valor de a para que la región delimitada por las gráficas de f y g tenga área $9/2$.
7. Hallar el área de un círculo de radio 3. (Sugerencia: notar que la porción del círculo en el primer cuadrante se describe mediante la función $f(x)=\sqrt{9-x^2}$).
8. Hallar el área de la región encerrada por las curvas
   a) $x^2+\frac{y^2}{9}=1$
   b) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$
9. Calcular la longitud de las siguientes curvas:
   a) $y=x^{\frac{3}{2}}$ desde el origen hasta el punto de coordenadas (4,8).
   b) $y=e^x$ entre $x=1$ y $x=2$.
   c) $y=\frac{1}{2}\cosh(2x)$ entre $x=0$ y $x=2\ln(\sqrt{5})$.
   d) $y=x^2$ entre $x=0$ y $x=5$.
10. Calcular el volumen de:
    a) El sólido generado por la región acotada por $f(x)=\sqrt{x}$ con x en el intervalo $[0,4]$ al rotar alrededor del eje x.
    b) Calcular el valor de x que divide al sólido generado en dos partes iguales.
11. Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de $y=\sqrt{x}$ e $y=x^2$ al girar en torno al eje x.
12. Calcular el volumen del sólido generado al girar en torno al eje y de la región acotada por las ecuaciones $y=6-3x$ e $y=0$ y $x=0$.