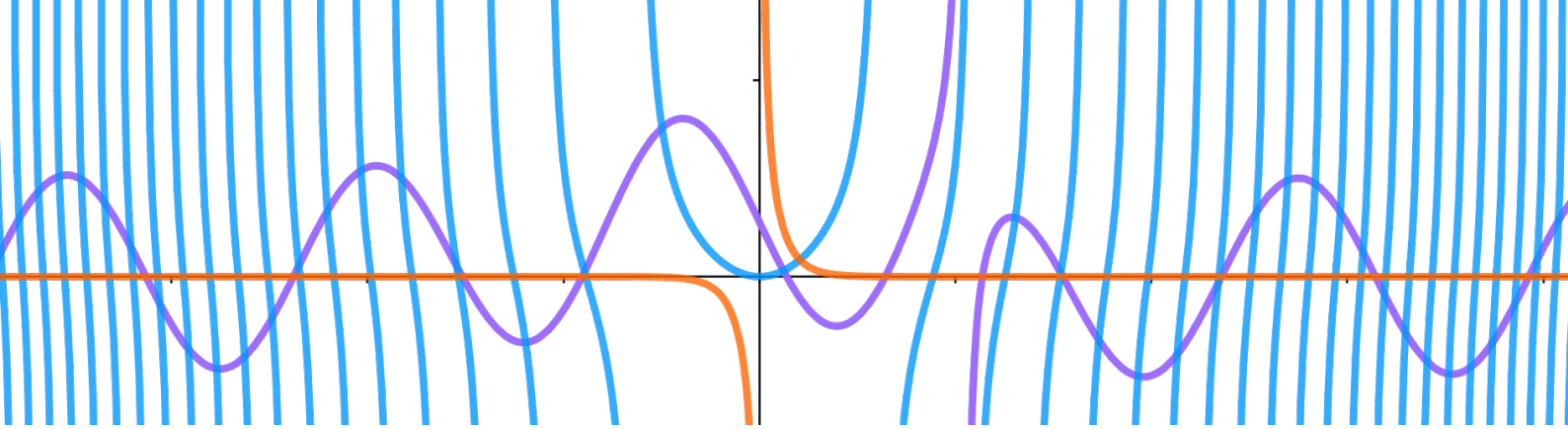


Práctica 10

Integración

1. Determinar, usando fórmulas conocidas para calcular áreas, el área encerrada por la gráfica de la función f y el eje x en el intervalo que se indica.
   a) $f(x) = 2 - x$ en $[0,2]$.
   b) $f(x) = \begin{cases} 3-2x & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$ en $[-2,2]$.
   c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ en $[0,1]$.
   d) Determinar, para todas las funciones del ejercicio anterior, una expresión para la función integral $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, donde a es el extremo izquierdo del dominio de f. Indicar en cada caso el dominio obtenido. Si la función integral F resulta derivable, hallar su derivada. ¿Qué observa?
2. Se sabe que una función continua f cumple que $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 3$.
   ¿Se puede afirmar que f es positiva en el intervalo $[-1,2]$? Dibujar gráficas de posibles funciones que cumplan con lo pedido.
3. Dos funciones f y g son continuas en el intervalo $[1,6]$ y cumplen que
   $$\int_3^6 f(x)dx = 2, \quad \int_1^6 f(x)dx = 5, \quad \int_3^6 g(x)dx = -1$$
   Calcular, justificando las propiedades utilizadas:
   a) $\int_3^6 (-f(x) + 4g(x))dx$
   b) $\int_1^3 (4f(x) + 3)dx$
4. Utilizando propiedades de la integral, mostrar que:
   a) $\frac{2}{e} \le \int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx \le 2.$
   b) $0 \le \int_1^2 \ln(x)\,dx \le 1.$
5. *a)* Verificar que $\frac{x|x|}{2}$ es una primitiva de $|x|$.
   b) Utilizando el inciso anterior, calcular $\int_{-4}^{4} |x|\,dx$. Comparar con $\left|\int_{-4}^{4} x\,dx\right|$. ¿Qué concluye?
   c) Verificar geométricamente la respuesta del inciso (b).

6. Calcular

   a) $\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x\,dx$.
   b) $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)+2\cos(x)\,dx$.
   c) $\int_1^4 \frac{t^6-t^2}{t^4}\,dt$.
   d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{sen}(x)|\,dx$.

7. Derivar las siguientes funciones:

   a) $g(x)=\int_1^x (t^2+1)^8\,dt$
   b) $g(x)=\int_0^{x^3} \operatorname{sen}^4(t)\,dt$.
   c) $g(t)=\int_{5t+3}^1 \frac{1}{1+u^2+\operatorname{sen}^2(u)}\,du$
   d) $g(u)=\int_{\cos u}^{u^3} e^{x^2}\,dx$

8. Para $x>0$, demostrar que $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{1/x}\frac{1}{1+t^2}\,dt$ no depende de x.
9. Para $x\geq 0$, probar la siguiente desigualdad

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geq x-\frac{x^3}{3}.$$

Métodos de integración

10. Calcular las siguientes integrales utilizando integración por sustitución:

    a) $\int \frac{5}{2}\left(\frac{x}{2}-7\right)^4\,dx$
    b) $\int \operatorname{sen}^7(x)\cos(x)\,dx$
    c) $\int \frac{1}{x}\ln(x)\,dx$
    d) $\int e^{5x}\,dx$
    e) $\int x\cos(2x^2)\,dx$
    f) $\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}\,dx$
    g) $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx$
    h) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$
    i) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$

11. Calcular las siguientes integrales utilizando integración por partes:

    a) $\int x\operatorname{sen}(x)\,dx$
    b) $\int x^2\operatorname{sen}(x)\,dx$
    c) $\int \ln(x)\,dx$
    d) $\int x^2e^x\,dx$
    e) $\int x\ln(x)\,dx$
    f) $\int \cos(\ln(x))\,dx$

12. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales expresando el integrando como suma de fracciones simples:

    a) $\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\,dx$
    b) $\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\,dx$
    c) $\int \frac{x+2}{x^2-x}\,dx$
    d) $\int \frac{x+2}{x^2+x}\,dx$
    e) $\int \frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)}\,dx$
    f) $\int \frac{1}{x^3+8}\,dx$

13. Calcular

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-x-6}\,dx$

b) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(2x^2)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+3x-1}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \cos(x)\,e^x\,dx$

f) $\displaystyle\int \mathrm{arc\,sen}(x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$

h) $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x}dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

k) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^3(x)}\,dx$

l) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-\sqrt{x}}\,dx$

m) $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

n) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$

14. Sean $a,b,c \in \mathbb{R}$, con $a,b>0$. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{a(x-c)^2+b}\,dx$.

15. Sea $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ una función tal que $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln^3(x)}$. Determinar f sabiendo que $f(e)=\dfrac{1}{2}$.

16. Dada f una función integrable en el intervalo $[-a,a]$, demostrar:

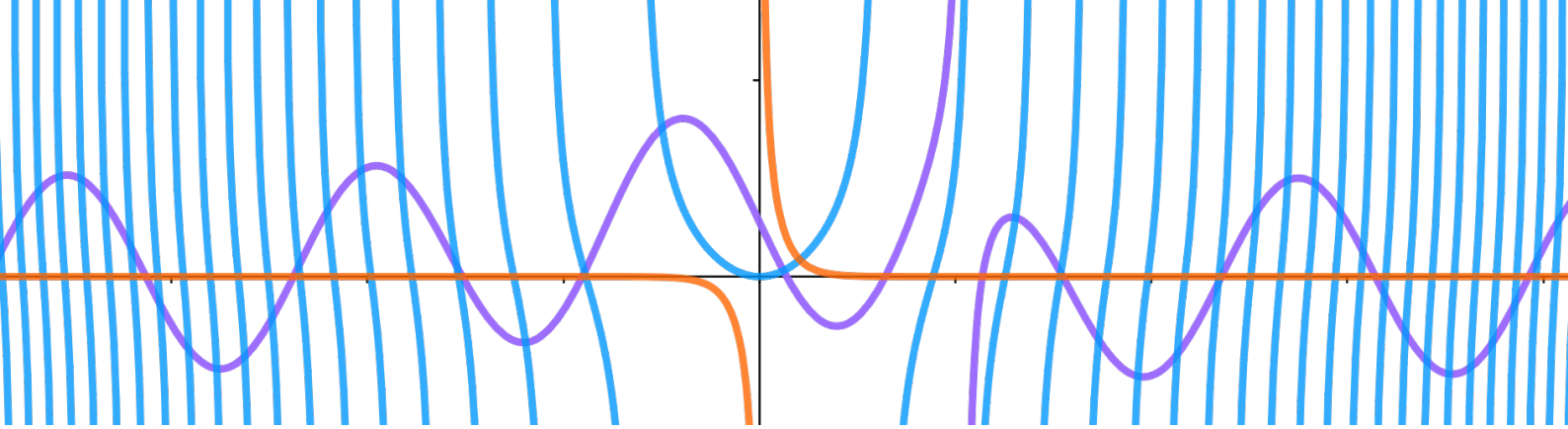
a) Si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

b) Si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

17. Demostrar que si f es periódica de período a y continua, entonces

$$\int_0^a f(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)\,dx \quad \text{para todo} \quad b\in\mathbb{R}.$$

Sugerencia: demostrar que $\displaystyle\int_t^{t+a} f(x)\,dx$ no depende de t.



CC +Mate - Práctica 10

1. Considerar la función $f(x) = x^2$.
   a) Encontrar una suma inferior y otra superior de 2 términos que aproxime el valor de la integral $\int_0^2 f(x)dx$.
   b) Repetir el inciso anterior con sumas de 4 términos.
   c) Demostrar que $f(x)$ es integrable en [0,b].
   Sugerencia: hallar las sumas superiores e inferiores que corresponden a dintervalo en n subintervalos de igual longitud y calcular la diferencia entre ambas. Deberán utilizar la fórmula $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$.
   d) Hallar una primitiva de f y calcular, usando la Regla de Barrow, el valor exacto de $\int_0^2 f(x)dx$. Comprobar el resultado obtenido en el inciso anterior.
   e) Comparar el valor exacto de la integral con los resultados obtenidos en los incisos $a)$ y $b)$.
2. Comprobar las condiciones del Teorema del valor medio del cálculo integral para las siguientes funciones. Hallar el valor medio correspondiente y el valor de c donde se alcanza.
   a) $f(x) = x - 1$, en el intervalo $[0,2]$
   b) $f(x) = e^x$, en el intervalo $[-1,1]$
3. Sea la función
$$f(u) = \begin{cases} -1 & 0 \leq u \leq 1 \\ 2 & 1 < u \leq 2 \end{cases}.$$
   Hallar el valor medio M correspondiente a $[0,2]$ y comprobar que no existe ningún c en el intervalo tal que $f(c) = M$. ¿Hay alguna contradicción con el Teorema del valor medio del cálculo integral?
4. Calcular

   a) $\int \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\,dx$
   b) $\int x^2\cos(x)\,dx$
   c) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$
   d) $\int x^3 e^{x^2}\,dx$
   e) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$
   f) $\int \cos(\sqrt{x})\,dx$
   g) $\int \frac{1}{e^x-1}\,dx$
   h) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

i) $\int x^2 \ln^2(x) dx$

j) $\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1} dx$

k) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

l) $\int_1^2 \sqrt{x} \ln(x)\, dx$

m) $\int_1^2 x \ln^2(x)\, dx$

n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{6 - 5\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}^2(x)} dx$

5. Sean

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

   a) Determinar una expresión para $g(x)$.
   b) Graficar las funciones $f(x)$ y $g(x)$.
   c) ¿Dónde son derivables estas funciones?

6. Mostrar que para $n \ge 2$,
$\int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \frac{1}{2(n-1)} \frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx.$
Sugerencia: integrar por partes $\int \frac{1}{(x^2+1)^{n-1}}\, dx$.

7. ¿Existe una función f continua en $\mathbb{R}$ que satisfaga una ecuación de la forma

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_x^1 t^2 f(t)\, dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + c$$

donde c es una constante? Encontrar una fórmula explícita para f.