ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)
TRABAJO PRÁCTICO 6: Teorema del Valor medio y sus aplicaciones

Ejercicio 1. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.

a) El teorema del valor medio se puede aplicar a la función $f(x) = x^{1/3}$ en $[-1, 1]$.

b) Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje x entonces debe haber al menos dos puntos en los que su tangente sea horizontal.

c) Si la gráfica de un polinomio tiene tres raíces entonces debe haber al menos dos puntos en los que su tangente es horizontal.

Ejercicio 2. Para las siguientes funciones, determinar las regiones de crecimiento y decrecimiento y, si existen, máximos y mínimos locales y absolutos. Graficar y comprobar los resultados obtenidos.

a) $g(x) = -3x^2 - 4x$

b) $h(x) = x|x|$

c) $g(x) = |1 - |x||$

Ejercicio 3. Justificar por qué las siguientes funciones alcanzan máximo y mínimo absoluto en los dominios indicados. Luego, hallarlos.

a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$, en $[-1/2, 1/2]$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, en $[3, 5]$

d) $f(x) = 4 - |x - 4|$, en $[1, 6]$

e) $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$, en $[-1, 3]$

Ejercicio 4. Determinar los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^4 - x^2 \;$ en $[-1, 4)$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2} \;$ en $(-\infty, \infty)$

c) $f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 1 < x \le 2, \end{cases}$.

e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

g) $f(x) = \arctan(x)$ en $(-\infty, \infty)$.

h) $f(x) = \arctan(x)$ en $[-1, 1]$.

En cada ítem, sin realizar cálculos, ¿es posible afirmar que la función tiene al menos un máximo y un mínimo absoluto?

Ejercicio 5. Calcular la mínima distancia del punto $(1, 2)$ a la parábola de ecuación $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Ejercicio 6. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 16 y

a) su suma sea mínima.

b) la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima.

Ejercicio 7. En una autopista, se instaló un radar a la entrada de un túnel y otro a su salida. Supondremos que el túnel mide 3 km y que en el mismo la velocidad está limitada a 100 km/h. Imaginemos que un vehículo entra en el túnel. El primer radar mide una velocidad de 90 km/h. El segundo, de 85 km/h. Con los antiguos radares, todo estaría correcto. Sin embargo, estos miden un dato más: cuando el coche entra en el túnel se pone en marcha un cronómetro, que para cuando el segundo radar detecta su salida. En nuestro supuesto, ha tardado 90 segundos. A la salida del túnel, la policía detiene el auto y le cobra multa por exceso de velocidad. ¿Cómo se sabe que efectivamente se ha cometido una infracción

Ejercicio 8. Se planea fabricar una caja rectangular sin tapa de una pieza de cartón de 80 cm por 1,5 mts cortando cuadrados en las esquinas y doblando los lados hacia arriba. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de mayor volumen que se pueda hacer de este modo?

Ejercicio 9. Un trozo de alambre de 10 metros de longitud se corta en dos partes. Con una parte se hace una circunferencia y la otra se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total de las dos figuras sea máxima?

Ejercicio 10. Hallar sobre la recta $y = x+2$ el punto que se encuentra más próximo al $(1/2, 2)$. Demostrar que la recta que pasa por el punto hallado y el $(1/2, 2)$ es perpendicular a $y = x+2$.

Ejercicio 11. Dadas las siguientes funciones, encontrar los puntos de inflexión (si existen):

a) $f(x) = (x^2 - 4)^2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$

c) $h(x) = x(x + 1)^{\frac{1}{2}}$

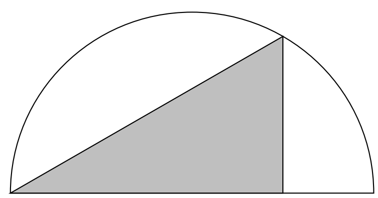
Ejercicio 12. Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0, \\ x^3 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$.
Mostrar que f'' no existe en $x = 0$. Analizar si en $x = 0$ hay un punto de inflexión. Graficar.

Ejercicio 13. Clasificar los extremos locales de las funciones del ejercicio 4), utilizando el criterio de la segunda derivada cuando sea posible.

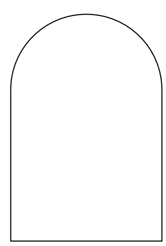
Ejercicios adicionales:

Ejercicio 14. Sea f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Dar un ejemplo de una función que sea estrictamente creciente en $[a, b]$ pero $f'(x)$ no sea mayor a cero en todo su dominio.

Ejercicio 15. Determinar las dimensiones del triángulo de área máxima inscripto en la circunferencia de radio 1 según la siguiente figura



Ejercicio 16. Una ventana normanda tiene forma de rectángulo con un semicírculo en su parte superior (ver figura). Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, encuentre las dimensiones de la ventana de modo que admita la mayor cantidad de luz posible.



Ejercicio 17. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f''(x) > 0$ para todo $(x, y) \in (a, b)$.

a) Mostrar que f es cóncava hacia arriba si y sólo si f^{-1} es cóncava hacia abajo. Interpretar graficamente.

b) Si además f es dos veces derivable, dar otra prueba de (a) utilizando el criterio de la segunda derivada para la concavidad.