ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)

TRABAJO PRÁCTICO 5 - Parte 2: DERIVADAS

Ejercicio 1.

a) Calcular las derivadas laterales de $f(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$ en $x = 0$ y determinar si f es derivable en dicho punto.

b) Determinar si $g(x) = \Big(f(x)\Big)^2$ es derivable en $x = 0$. Graficar la función.

Ejercicio 2. Dada $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x)\,\text{sen}(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ (x-1)^3 + 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

a) Analizar la continuidad de g en $\mathbb{R}$.

b) Determinar el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la función derivada.

Ejercicio 3. Dada $f(x) = \begin{cases} \cos(2x) + 1, & x < 0 \\ x^2 + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

a) Analizar la continuidad de la función f en $\mathbb{R}$ y graficar.

b) Determinar el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la función derivada.

c) Analizar la continuidad de la función derivada.

Ejercicio 4. Dadas las funciones $f(x) = x\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $g(x) = x^2\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

a) Determinar si es posible redefinir estas funciones de manera que resulten continuas en $x = 0$ y en caso afirmativo dar una expresión para la función redefinida y analizar su derivabilidad.

b) Si alguna de las funciones redefinidas resultara derivable $x = 0$, analizar la continuidad de su derivada.

Ejercicio 5. Sea $f(x) = xg(x)$ con g continua en $x = 0$. Probar que f es derivable en $x = 0$. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

Ejercicio 6. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que la función sea continua en $x = 1$.

b) ¿Es f derivable en $x = 1$?

Ejercicio 7. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Hallar el valor de a y b para que la función resulte continua y derivable en $x = 1$.

Ejercicio 8. Determinar, si existen, los valores de a y b para que las siguientes funciones sean derivables en sus dominios:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ \\ ax^2 + bx & \text{si } x > -1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x < 0 \\ \\ b\sqrt{x} + 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio 9. Sea f una función definida en un entorno del origen.

a) Si $|f(x)| \leq |x|$, probar que f es continua en el origen. Construir un ejemplo de una función que cumpla esa condición y que no sea derivable en $x = 0$. Interpretar gráficamente.

b) Si $|f(x)| \leq x^2$, probar que f es derivable en el origen. Calcular $f'(0)$ e interpretar gráficamente.

Problemas de aplicación

Ejercicio 10. Un cubo se expande de manera que su lado está cambiando a razón de 5 m/s. Hallar la razón de cambio de su volumen cuando su arista mide 4 m de longitud.

Ejercicio 11. Se bombea aire hacia el interior de un globo esférico de modo que su volumen aumenta a razón de 100 cm^3/s. Calcular la razón a la cual están cambiando el radio y la superficie del globo cuando el radio es 25 cm.

Ejercicio 12. Desde una altura de 1.5 m se lanza una flecha con un cierto ángulo respecto del suelo y viaja trazando un arco parabólico dado por la ecuación $y = ax^2 + x + c$. La flecha vuelve a alcanzar la misma altura a una distancia horizontal de 60 m. Sabiendo que la dirección de la flecha es tangente a trayectoria ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo (formado entre la flecha y el suelo) en función de la distancia horizontal recorrida?. ¿Cómo es dicho ángulo cuando la flecha parte, alcanza la altura máxima y cuando impacta en el suelo?