ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)
TRABAJO PRÁCTICO 5 - Parte 1
DERIVADAS

Ejercicio 1. La relación entre la distancia recorrida en metros por un automóvil y el tiempo en segundos es $e(t) = 6t^2$. Calcular

a) La velocidad promedio que tiene el automóvil en el intervalo de tiempo $[1, 1+h]$.

b) La velocidad en el momento $t = 1$ (sugerimos: tomar el límite $h \longrightarrow 0$ al cociente incremental calculado en el inciso a)).

Ejercicio 2. a) Calcular por definición la derivada de las siguientes funciones en los puntos indicados:

i) $f(u) = u^3 - 4$, en el punto de abscisa $u = 0$.

ii) $g(x) = \frac{1}{x}$, en el punto de abscisa $x = 1$.

iii) $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$, en el punto de abscisa $x = 2$.

iv) $j(x) = cos(2x)$, en el punto de abscisa $x = 0$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las funciones del inciso anterior en los puntos indicados. Graficar las funciones y las rectas.

Ejercicio 3. Calcular por definición la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = k$, con k constante.

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$

e) $f(x) = \sqrt{x}$

Ejercicio 4. Mostrar que la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x$ no posee rectas tangentes horizontales.

Ejercicio 5. ¿Cuántas rectas tangentes a la gráfica de $g(x) = \frac{1}{x+3} + 2$ son paralela a la recta de ecuación $y + x - 3 = 0$. Hallar las ecuaciones y graficar.

Ejercicio 6. Hallar los puntos de la gráfica de $f(x) = 2\operatorname{sen}(x) + 3$ donde la recta tangente es perpendicular a la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 1$. Graficar.

Ejercicio 7. Determinar el valor de la constante c para que la recta de ecuación $y = x$ sea tangente a la gráfica de $f(x) = x^2 + c$. Graficar.

Ejercicio 8. ¿Cuántas rectas tangentes a la gráfica de $g(x) = \sqrt{x}$ pasan por el punto $(3, 2)$? Hallar las ecuaciones y graficar.

Ejercicio 9. Analizar en cada caso si existe la recta tangente a la gráfica en $(0, 0)$. Interpretar gráficamente (es decir, graficar la función y la recta tangente si existiera).

a) $f(x) = x + |x|$

b) $g(x) = x.|x|$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \geq 0 \\ 3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Ejercicio 10. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x > 1 \\ x^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

a) Probar que f no es continua en $x = 1$.¿ f es derivable en $x = 1$?

b) Graficar.

Ejercicio 11. Dadas las siguientes funciones, determinar el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la derivada.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^4 + x^2 - 2$

b) $f(x) = x^{\frac{3}{4}} + 10x - \pi$

c) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 5}$

d) $f(x) = \dfrac{x^4(x + 1)}{x - 1}$

e) $f(x) = (x^{-\frac{1}{2}} + x^2).(x^3 + \frac{1}{x})$

f) $f(x) = (x - \sqrt[3]{x})(x^2 + x^{-5})$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \dfrac{3x^{\frac{1}{2}}}{(x - 1)(x + 1)}$

i) $f(x) = \dfrac{x}{\tan(x)}$

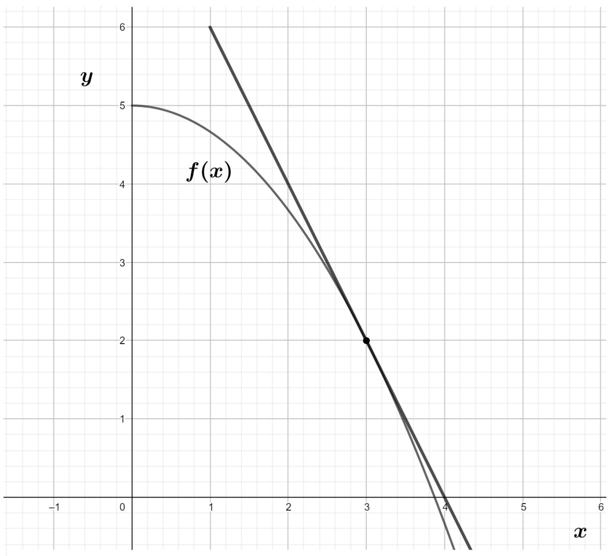
j) $f(x) = \dfrac{x + \cos(x)}{\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)}$

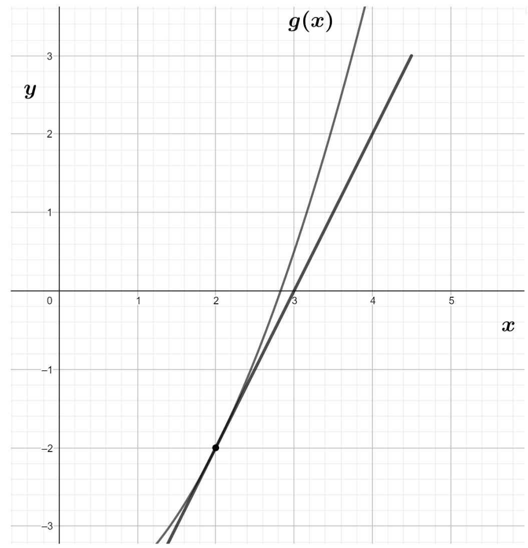
Ejercicio 12. En cada caso, hallar $g \circ f$ y $f \circ g$, el dominio de definición, el dominio de derivabilidad y calcular su derivada.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \quad g(x) = 1 - x^2$

b) $f(x) = \cos(x) \quad g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

Ejercicio 13. Sean f y g funciones derivables en sus dominios. A partir de las gráficas de f, g y sus rectas tangentes en $x = 3$ y $x = 2$, respectivamente.





a) Hallar, justificando adecuadamente, el valor de $f'(3)$ y $g'(2)$. Cuánto vale $(g \circ f)'(3)$?

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $(g \circ f)$ en el punto de abscisa $x = 3$.

c) Es posible obtener la recta tangente a la gráfica de $(f \circ g)$ en el punto de abscisa $x = 2$? Justificar su respuesta.

Ejercicio 14. Hallar la derivada de $\operatorname{arc\,sen}(x)$, $\arccos(x)$ y $\arctan(x)$.

Ayuda 1: Considerar que estas funciones son funciones inversas de $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ y $\tan(x)$ respectivamente, que son derivables y cumplen que $(f \circ f^{-1})(x) = x$.

Ayuda 2: Para hallar las derivadas serán útiles las siguientes identidades: $\cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u) = 1$, $\tan^2(u) + 1 = \sec^2(u)$.

Ejercicio 15. Para cada una de las siguientes funciones indicar el dominio de definición, el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la derivada.

a) $f(x) = (x^4 + x^2 + \pi)^{-\frac{3}{4}}$

b) $f(x) = (3x + \frac{2}{x})^4$

c) $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^3}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{2x^3 + 4x^2 + \frac{1}{2}x}$

e) $f(x) = (x^2 + 5)\sqrt{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{(x-2)^2}$

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

h) $f(x) = \sec(x^2 + 1)$

i) $f(x) = \operatorname{sen}^3(5x^2 + x)$

j) $f(x) = x \arccos(2x + 5)$

k) $f(x) = \arctan(\operatorname{sen}(2x))$