ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)

TRABAJO PRÁCTICO 16: Series de Potencias

Ejercicio 1. 1. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n^2 4^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln(n)}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{3^n}$

2. Hallar el dominio de convergencia de las series de potencias de los incisos a), b), e) y f).

Ejercicio 2. Dada $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

a) Calcular su radio y dominio de convergencia.

b) Demostrar que $f''(x) = f(x)$. Indicar en que intervalo son válidas las operaciones de derivación realizadas.

Ejercicio 3. Probar las siguientes identidades derivando o integrando:

a) $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} \qquad \forall\, x : |x| < 1$ b) $\displaystyle -ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \forall\, x : |x| < 1$

En cada caso, indicar en que intervalos son válidas las operaciones de derivación y/o integración realizadas.

Ejercicio 4. Dada $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

a) Calcular su radio y dominio de convergencia.

b) Demostrar que $f'(x) = f(x)$. Indicar en que intervalo es válida la operación de derivación realizada.

c) Demostrar que $f(x) = e^x$.

d) ¿Para qué valores de x esta es la serie de Taylor de e^x alrededor de $x = 0$?

e) Verificar la siguiente igualdad: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$

Ejercicio 5. Dada la serie $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$.

a) Hallar su dominio de convergencia.

b) Cacular $f(0)$ y $f^{(101)}(0)$

c) Mostrar que se satisface $x(f'(x) - f(x)) = f(x)$. Indicar en que intervalo es válida la operación de derivación realizada.

d) Encontrar la expresión de f. Comprobar nuevamente el inciso c).

Ejercicio 6. Encontrar la serie de Taylor de las siguientes funciones alrededor del punto indicado y dar el radio de convergencia.

a) $f(x) = cos\,(x),\;\; x = 0$

b) $f(x) = sen\,(x),\;\; x = \frac{\pi}{2}$

c) $f(x) = ln(1 + x),\; x = 0$

d) $f(x) = sen(x^2),\; x = 0$

e) $f(x) = e^{-x^3},\; x = 0$

f) $f(x) = \dfrac{3}{x^3 - x - 2},\quad x = 0$

En cada caso, ¿en qué intervalo la serie converge a la función dada?

AYUDA: para resolver los incisos d) y e) utilizar la representación en serie de Taylor de $sen(u)$ y e^u alrededor de $u = 0$ respectivamente.

Ejercicio 7. Calcular el dominio de convergencia y la función suma de las siguientes series. Justificar los pasos realizados.

a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + ...$

b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + ...$

c) $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + ...$

d) $\dfrac{x^2}{2 \cdot 1} - \dfrac{x^3}{3 \cdot 2} + \dfrac{x^4}{4 \cdot 3} - \dfrac{x^5}{5 \cdot 4} + ...$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n!}$

Ejercicio 8. Mediante el desarrollo en series de potencias de e^{-x^3} y $sen(x^2)$ alrededor de $x = 0$, aproximar las siguientes integrales con un error menor a 10^{-4}:

a) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^3}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 sen(x^2)\,dx$

En cada caso, indicar porque la operación de integración de series de potencias es válida.

Ejercicio 9. Mediante desarrollos de Taylor adecuados verificar las siguientes igualdades:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{(2n)!} = -1$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} = \ln(3/2)$

Ejercicio 10. Demostrar que las siguientes series convergen. Dar un valor exacto para cada una.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$

Ejercicio 11. Dada la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n+1}$$

a) Determinar el dominio (dominio de convergencia) para el cual la serie de potencias define una función f.

b) ¿Puede asegurar que existe f' en algún intervalo? En caso afirmativo hallar la serie que la representa.

c) Encontrar la función suma $f(x)$ en el dominio de convergencia.

Ejercicio 12. Sea $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Demostrar que existe la serie formal de Taylor alrededor de $x_0 = 0$, pero que no converge hacia la función dada para ningún $x \neq 0$.

Ejercicio 13. Dadas las series $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n (1-x)$.

a) Hallar el dominio de convergencia.

b) Hallar la función límite (función suma) y analizar su continuidad en [0,1].

Ejercicios adicionales

Ejercicio 14. a) Muestre que $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ es una biyección entre los intervalos $[-1,1)$ y $[0,+\infty)$

b) Usando series de potencias apropiadas y la identidad $\ln(g(x)) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, construir una serie de potencias convergente para todo $x : |x| < 1$ que permita hallar el logaritmo natural de cualquier número positivo. En particular, hallar las series que representan a $\ln(5)$ y $\ln(9)$.

Sugerencia: observar que si $x = \frac{2}{3}$ entonces $\ln(5) = \ln(g(\frac{2}{3}))$.

Ejercicio 15. Demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

Ejercicio 16. Analizar la convergencia y convergencia absoluta de la siguiente serie y, de ser así, calcular a qué valor lo hace.

$$\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6} + \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8} - \frac{1}{8\cdot 9\cdot 10} + \ldots$$

(Sugerencia: Probar que $\dfrac{1}{2k(2k+1)(2k+2)} = \dfrac{1}{4k} - \dfrac{1}{2k+1} + \dfrac{1}{2(2k+2)}$)