ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)
Trabajo práctico 10

Métodos de Integración

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales utilizando integración por sustitución:

a) $\displaystyle\int \frac{5}{2}\left(\frac{x}{2}-7\right)^4 dx$

b) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7(x)\cos(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ \ln(x)\, dx$

d) $\displaystyle\int x\cos(2x^2)\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln(x))}{x\ln(x)}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1}\, dx$

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales utilizando integración por partes:

a) $\displaystyle\int x\operatorname{sen}(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int \ln(x)\, dx$

d) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$

e) $\displaystyle\int x\ln(x)\, dx$

f) $\displaystyle\int \cos(\ln(x))\, dx$

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales de funciones racionales expresando el integrando como suma de fracciones simples:

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)(x+2)^2}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2-x}\, dx$

d) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x}\, dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-2)^2(x+1)}\, dx$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+8}\, dx$

Ejercicio 4. Hallar las primitivas indicadas:

a) $\displaystyle\int x^2\cos(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}(2x^2)\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int x^3 e^{x^2}\,dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$

g) $\displaystyle\int \cos(x)\,e^x\,dx$

h) $\displaystyle\int \cos(\sqrt{x})\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x-1}\,dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1+e^x}{1-e^x}\,dx$

k) $\displaystyle\int x^2\ln^2(x)dx$

l) $\displaystyle\int \frac{\arctan(x)}{x^2+1}dx$

m) $\displaystyle\int x\arctan(x)\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

ñ) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$

Ejercicio 5. Calcular:

a) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\mathrm{sen}^3(x)}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x}\ln(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-\sqrt{x}}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 x\ln^2(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{6-5\,\mathrm{sen}(x)+\mathrm{sen}^2(x)}\,dx$

Ejercicio 6. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$, con $a,b>0$. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{a(x-c)^2+b}\,dx$.

Ejercicio 7. Sea $f:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ una función tal que $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln^3(x)}$. Determinar f sabiendo que $f(e)=\dfrac{1}{2}$.

Ejercicio 8. Utilizando la sustitución $u=\sqrt[4]{1+x^3}$, calcular

$$\int \frac{\sqrt[4]{1+x^3}}{x}\,dx$$

Ejercicio 9. Sea f una función continua en el intervalo $[0,4]$ tal que $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=10$. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^2 uf\left(u^2\right) du$

b) $\displaystyle\int_{-3}^9 f\left(\frac{t}{3}+1\right) dt$

Ejercicio 10. Demostrar:

a) Dada f una función integrable en el intervalo $[-a,a]$:

   i) si f es par, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx.$

   ii) si f es impar, entonces $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0.$

b) Si f es periódica de período a y continua, entonces

$$\int_0^a f(x)dx = \int_b^{b+a} f(x)\,dx \quad \text{para todo} \quad b\in\mathbb{R}.$$

Sugerencia: demostrar que $\displaystyle\int_t^{t+a} f(x)\,dx$ no depende de t.

Integrales de funciones trigonométricas e hiperbólicas

Ejercicio 11. Resolver las siguientes integrales trigonométricas, las cuáles son funciones racionales de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
Sugerencia: Hacer el cambio de variables: $t=\tan(x/2)$

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \tan x}$

c) $\displaystyle\int \frac{\tan x\, dx}{1+\operatorname{sen} x}$

Ejercicio 12. Resolver las siguientes integrales trigonométricas, las cuáles son funciones racionales de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Usar los cambios de variables $t=\cos x$ o $t=\operatorname{sen} x$ según convenga.

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{\cos^3 x + 2\cos(x)\operatorname{sen}^2 x}$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x - 2\operatorname{sen} x}$

c) $\int \cos^3 x \, dx$ Sugerencia: Escribir $\cos^3 x = \cos x \cos^2 x = \cos x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x)$ y luego usar alguno de los cambios de variables indicados.

d) $\int \dfrac{\cos^3 x \, dx}{\operatorname{sen}^4 x}$

e) $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^4 x \, dx$

Ejercicio 13. Demostrar las identidades: $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ y $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

Ejercicio 14. Hallar las funciones primitivas de $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$:

a) Utilizando la identidad $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

b) Utilizando el método de integración por partes y usando el teorema de Pitágoras en la expresión resultante.

Ejercicio 15. Hallar las primitivas de las siguientes funciones.

a) $\int \cos^2 x \, dx$ Sugerencia: Usar la identidad $\cos^2(x) = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$.

b) $\int \sqrt{1 - \cos x} \, dx$ Sugerencia: Realizar la sustitución $x = 2t$

c) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^4 x} \, dx$ Sugerencia: Realizar la sustitución $t = \tan x$

Ejercicio 16. *Funciones trigonométricas hiperbólicas:*

a) Recordando las definiciones del seno hiperbólico en términos de exponenciales, calcular las primitivas de $\int \operatorname{senh}^2 x \, dx$.

b) Utilizar el inciso anterior y la identidad $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ para calcular las primitivas de $\int \cosh^2 x \, dx$.

c) Aplicar una sustitución conveniente para calcular las primitivas de $\int \cosh^3 x \operatorname{senh}^2 x \, dx$.

Ejercicio 17. Resolver las siguientes integrales:

a) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx$ Sugerencia: Utilizar la sustitución $x = \operatorname{sen} t$

b) $\int_{0}^{3/4} \sqrt{1 + x^2} \, dx$ Sugerencia: Utilizar la sustitución $x = \operatorname{senh} t$

c) $\displaystyle\int_1^{17/8} \sqrt{x^2-1}\,dx$ Sugerencia: Utilizar la sustitución $x = \cosh t$

Ejercicio 18. Resolver utilizando sustituciones trigonométricas e hiperbólicas, cuando sea necesario:

a) $\displaystyle\int_4^{20/3} \sqrt{x^2-16}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-25/2}^{0} \sqrt{5+x^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx.$

e) $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{2}} \frac{1}{x^2\sqrt{9-x^2}}dx$

f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2}{\sqrt{9x^2+1}}\,dx$