ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)

TRABAJO PRÁCTICO 15: SERIES NUMÉRICAS

Ejercicio 1. Hallar la suma de las series:

a) $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \dots$

b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{7^{i/2}}$

c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{5^{j-1}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1000}^{\infty} \left(\frac{13}{15}\right)^n$

Ejercicio 2. Explicar por qué no vale la siguiente expresión:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0\,.$$

Ejercicio 3. Analizar si es cierta la siguiente igualdad:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots = 1/(1-2) = -1.$$

Ejercicio 4. Una persona quiere extraer de su cuenta bancaria unos \$10000, y luego desea extraer cada año 3/4 de lo que extrajo el año anterior. Si asumimos que la cuenta no da intereses ni posee gastos, ¿cuál es la menor cantidad de dinero que debe tener en su cuenta antes de la primera extracción para contar con fondos por un período ilimitado de tiempo?

Ejercicio 5. Analizar para qué valores de $s \in \mathbb{R}$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$

Ejercicio 6. Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

a) Hallar una expresión general para la suma parcial N-ésima.
(Pista: Mostrar que $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$)

ii) Mostrar que la serie converge y determinar su valor.

Ejercicio 7. Calcular el valor exacto de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Ejercicio 8. Averiguar si las siguiente series convergen:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2(n)}{n^3}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{n^3+2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}(n)}{n^2+1}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n}$

g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2 e^{-n}$

h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n)}$

i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

k) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} sen\left(\frac{1}{n}\right)$

Ejercicio 9. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $0 < a_n \leq 1$ para todo n. Probar que si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,sen}(a_n)$ converge.

Ejercicio 10. Si $a_n > 0$, probar que: si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ converge.
¿Qué ocurre si a_n no es siempre positivo?
Recomendación: Estudiar series cuyos términos sean de la forma $a, a, -2a, b, b, -2b, \cdot$

Ejercicio 11. Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$

a) Decidir para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ resulta convergente.

b) Para $\alpha = 2$, hallar cuántos términos de la serie deben sumarse para aproximar el valor límite de la serie con un error menor que 10^{-3}.

Ejercicio 12. Averiguar si las siguientes series son convergentes y si son absolutamente convergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^3+n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

f) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \dfrac{1}{4^2} + \dfrac{1}{5^3} \cdots$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

h) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{3^3} + \ldots$

Ejercicio 13. a) Analizar si las siguientes series son convergentes y si son absolutamente convergentes:

I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4}$

II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}.$

b) Calcular el valor de las series con error menor que 10^{-3}.

AYUDA: Recordar que si $\{a_n\}$ satisface las condiciones del Criterio de Leibniz, entonces $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n - s_N\right| \leq a_{N+1}$.

Ejercicio 14. a) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$, calcular con un error menor que 10^{-4}.

b) Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n}$, calcular con un error menor que 10^{-4}.

Ejercicio 15. Mostrar que la siguiente integral es convergente, pero no absolutamente convergente:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

AYUDA: Para cada $n \in \mathbb{N}$, ver que $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x} dx \geq a_n$, para cierta sucesión $\{a_n\}$ de términos positivos.

Ejercicios adicionales

Ejercicio 16. Sea $\{u_n\}_n$ una sucesión de términos positivos y $p > 0$.

a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge y $p > 1$, mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p$ también converge.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge y $p < 1$, mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p$ también diverge.

c) Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Ejercicio 17. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n > 0$ para $n > N$.

(a) Sea $r > 1$. Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} n^r a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(a_n + 1)$ converge.

Ejercicio 18. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales tal que $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ para $n \geq 1$. Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge si y sólo si } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

(Sugerencia: Usar que $a_1 + a_2 + \ldots . a_{2^{k+1}-1} \leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k}$, para $k \geq 0$)