ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
FHOM
TRABAJO PRÁCTICO 4 (Parte 2): FUNCIONES CONTINUAS

Ejercicio 1. Analizar, a partir de la gráfica, la continuidad de la función del Ejercicio 1 de la Práctica 4 (Parte 1) en $x = 2$, $x = 4$ y $x = 8$.

Ejercicio 2. Sea $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & \text{si } x \leq 1 \\ \\ x^2 + 3x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) Indicar el dominio de f.

b) Analizar la continuidad de f en $x = 1$.

c) Analizar la continuidad de f en $x = 4$.

d) Analizar la continuidad de f en el resto del dominio.

e) Graficar.

Ejercicio 3. Analizar la continuidad y clasificar las discontinuidades de la siguiente función en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 4. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en todo el dominio y clasificar las discontinuidades:

a) $k(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x + |x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & \text{si } x < 2 \\ x+1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

d) $h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(3x) + 2, & x < 0 \\ \left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}, & x \geq 0 \end{cases}$

Ejercicio 5. Si f tiene una discontinuidad evitable en $x = a$, mostrar que existe una función g continua en $x = a$, que coincide con f en todo punto, salvo en $x = a$.

Ejercicio 6. Graficar $f(x) = \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$. Hallar los límites laterales de $f(x)$ cuando x tiende a 2. ¿Existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$? ¿Puede definirse f en $x=2$ para que f sea continua en ese punto?

Ejercicio 7. Sea f continua en $x=2$. Se sabe que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 9$. Calcular, justificando la respuesta, los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$. Aunque no se dice nada sobre el signo de los valores de la función $f(x)$: ¿ Por qué es posible considerar el límite cuando x tiende a 2 de la función $\sqrt{f(x)}$?
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(2x)$.

Ejercicio 8. Determinar si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(\arctan(x))}{\arctan(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua en $x=0$.
En caso negativo, ¿puede redefinirse f en $x=0$ para que resulte continua en ese punto?

Ejercicio 9. Determinar los valores de c y b para los cuales las siguientes funciones son continuas en $\mathbb{R}$.

a) $g(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \leq 2 \\ cx+6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{bx^2+bx+2x+2}{x^2-2x-3} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } x = -1 \\ \dfrac{x+1}{\sqrt{x+2}-1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2+bx+c & \text{si } |x-2| \geq 1 \end{cases}$

Ejercicio 10. Utilizando el Teorema del Valor Intermedio, analizar el signo de las siguientes funciones:

a) $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{7}{2}$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Ejercicio 11. Siendo $f(x) = x^3 + 3x - 2$, justificar, utilizando el Teorema del Valor Intermedio, por qué las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a) f posee al menos una raíz en el intervalo $[0,1]$.

b) Existe $c \in [2,3]$ tal que $f(c) = 27{,}012$.

Ejercicio 12. Para cada uno de los siguientes polinomios, hallar un entero n tal que $p(x) = 0$ para algún x entre n y $n+1$.

a) $p(x) = x^3 - x + 3$

b) $p(x) = 4x^2 - 4x - 1$

Ejercicio 13. Para cada una de las funciones del Ejercicio 12 hallar (aproximadamente) con error menor a $1/16$ una raíz de p. Es decir, si llamamos x_0 a la raíz buscada de la función p y x_p a la aproximación dada, se debe cumplir $|x_0 - x_p| < 1/16$.

Ejercicio 14. Demostrar, utilizando el Teorema del Valor Intermedio, que las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = x^2$ se intersecan.

Ejercicio 15. Demostrar que existe algún número x tal que $\operatorname{sen} x = x - 1$.

Ejercicio 16. Sea f una función continua definida en $[0, 48]$ tal que $f(0) = f(48)$. Mostrar que hay algún valor $x \in [0, 24]$ para el cual $f(x) = f(x + 24)$.
Sugerencia: Construir la función $g(x) = f(x) - f(x+24)$ y demostrar que $g(x) = 0$ para algún $x \in [0, 24]$.

Ejercicio 17. Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ tales que $f(a) < g(a)$ y $f(b) > g(b)$. Demostrar que existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = g(x)$.

Ejercicio 18. Sea $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$, con $I = \mathrm{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$. Analizar si se puede asegurar la existencia de extremos absolutos de $f(x)$ en el dominio I justificando la respuesta. En caso afirmativo, encontrarlos.

a) $I = \mathbb{R}$ b) $I = [0, 7)$ c) $I = [1, 6]$ d) $I = (0, 6]$

Ejercicios adicionales

Ejercicio 19. Determinar si las siguientes funciones son estrictamente monótonas crecientes o decrecientes en el dominio indicado. ¿Por qué se puede afirmar que admiten inversa continua?

a) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $Dom(f) = [1, 10]$

b) $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$, $Dom(f) = [0, 2)$

Ejercicio 20. Dada $f(x)$ continua en [a,b], construir una función que sea continua en $\mathbb{R}$ y que coincida con f en [a,b] (en realidad existe una infinidad de dichas funciones).

Ejercicio 21. Un docente sube y baja una montaña por el mismo camino en 48 hs (parte a las 0 hs de un día y llega a las 24 hs del día siguiente). Mostrar que independientemente de la velocidad a la que vaya en cada momento y de los descansos que pueda haber hecho, hay un punto del camino por el cual pasó ambos días a la misma hora. (Sugerencia: Relacionar con el Ejercicio 16).

Ejercicio 22. Sea f una función continua definida en el intervalo $[0, 1]$ tal que su imagen está contenida en el intervalo $[0, 1]$. Demostrar que existe que $f(x) = x$. Representar gráficamente la situación.

Ejercicio 23. *a*) Se sabe que cierto gallinero rectangular tiene un perímetro de 30 m. Hallar una expresión para la función h que represente la superficie del gallinero en función de su ancho. Determinar el ancho en el cual la función h alcanza su máximo valor.
Observación: La función h fue hallada en el Ejercicio 3 de Problemas de aplicación de la Práctica 2 Segunda Parte.
b) Supongamos que en uno de los lados se debe ubicar un portón de 8 m. ¿Cuál sería ahora el ancho en el cual se alcanza su máximo valor?