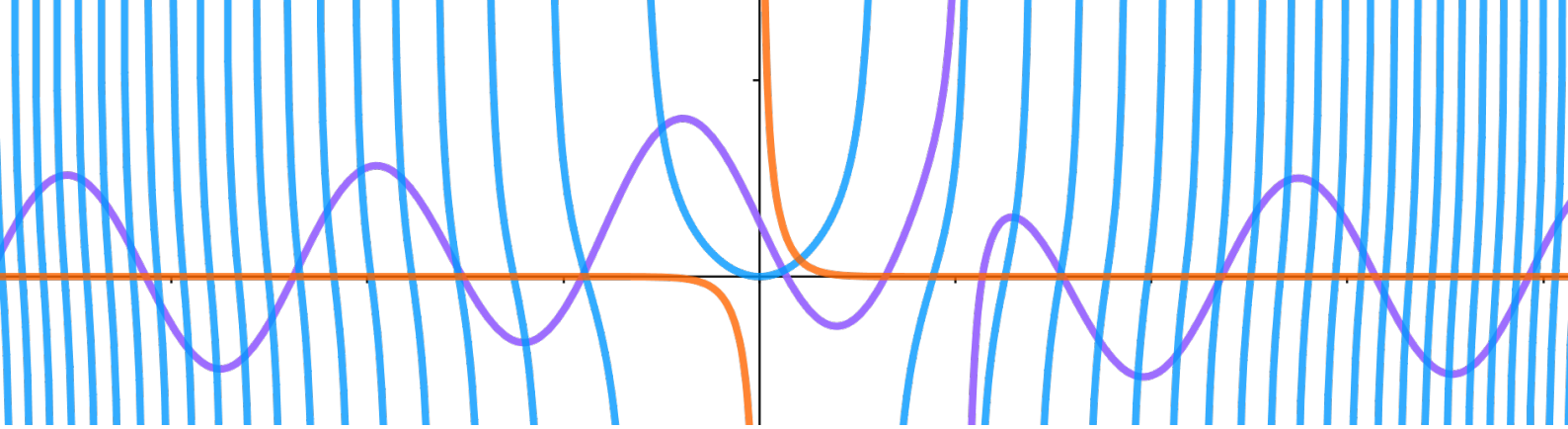


Práctica 5

Aplicaciones de la derivada

1. Dada $f(x) = x^3$,
   a) Mostrar por definición que f es estrictamente creciente.
   b) Hallar la pendiente de la curva en $x = 0$.
   c) Sin realizar nuevos cálculos, hallar los extremos absolutos de f en el intervalo $[-1,4]$.
   d) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(1,1)$. Observar que esa recta tangente también corta a la gráfica en $(-2,-8)$.
2. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.
   a) El teorema del valor medio se puede aplicar a la función $f(x) = x^{1/3}$ en $[-1,1]$.
   b) Si la gráfica de una función tiene tres intersecciones con el eje x entonces debe haber al menos dos puntos en los que su tangente sea horizontal.
   c) Si la gráfica de un polinomio tiene tres intersecciones con el eje x entonces debe haber al menos dos puntos en los que su tangente es horizontal.
3. *a*) Utilizando el teorema del valor medio, probar que si f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$ entonces f es estrictamente creciente en $[a,b]$.
   b) Bajo las mismas hipótesis de que f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), dar un ejemplo de una función que sea estrictamente creciente en $[a,b]$ pero $f'(x)$ no sea mayor que cero.
4. Graficar las siguientes funciones. En cada caso determinar analítica y gráficamente las regiones de crecimiento y decrecimiento y, si existen, máximos y mínimos locales y absolutos.
   a) $g(x) = -3x^2 - 4x$
   b) $h(x) = x|x|$
   c) $g(x) = |1 - |x||$
5. Determinar los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos dados. Indicar en qué puntos se alcanzan.
   a) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$, en $[-1/2, 1/2]$
   b) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$, en $[-2,2]$
   c) $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, en $[3,5]$
   d) $f(x) = 4 - |x-4|$, en $[1,6]$
   e) $f(x) = 2x - 3x^{2/3}$, en $[-1,3]$

   En cada ítem, ¿es posible afirmar que la función tiene un máximo y un mínimo absoluto sin hacer cálculos? ¿Por qué?

6. Determinar los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.
   a) $f(x) = x^4 - x^2$ en $[-1,4)$
   b) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$ en $(-\infty,\infty)$
   c) $f(x) = \begin{cases} 3+x & \text{si } \ 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } \ 1 < x \le 2, \end{cases}$.
   d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ -1 \le x \le 0, \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } \ 0 < x \le 2, \end{cases}$
   e) $f(x) = x(x-1)(x-2)$ en $(-1,3)$.

   En cada ítem, sin realizar cálculos, ¿es posible afirmar que la función tiene un máximo y un mínimo absoluto?

Funciones inversas

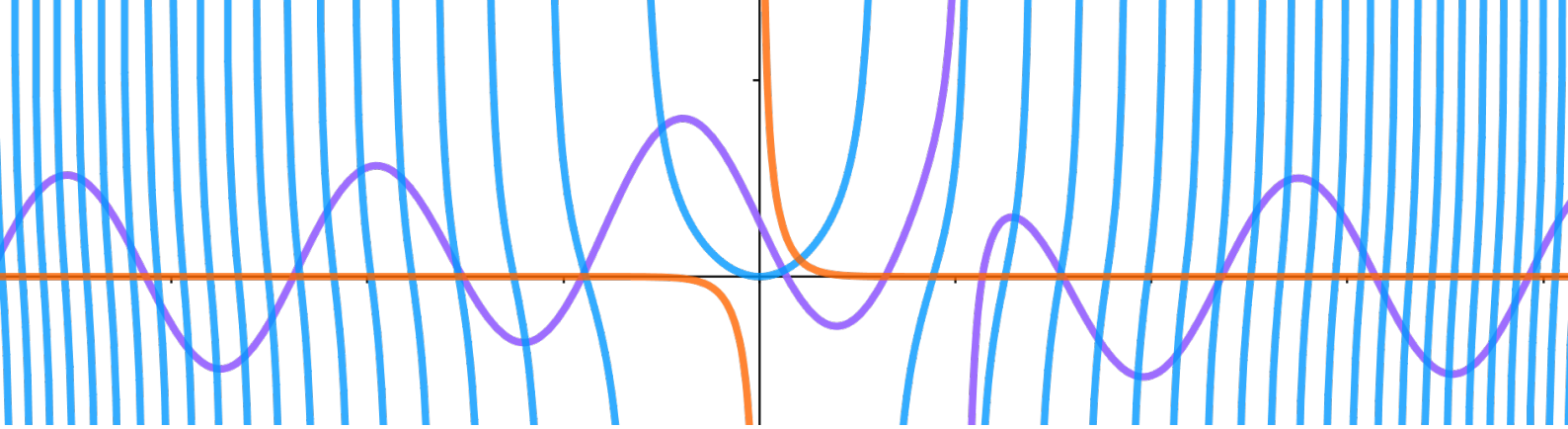
1. Analizar si las siguientes funciones admiten inversa y, en caso afirmativo, dar su expresión.
   a) $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
   b) $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$.
   c) $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   d) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   e) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$
   g) $f : (-\infty,0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$
   h) $f : (-\infty,0] \to (-\infty,4]$, $f(x) = 4 - x^2$

   Observación:: Una función $f : A \to B$ puede tener (o no) inversa dependiendo de quienes son los conjuntos A y B.

2. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal si es de la forma $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demostrar:
   a) Toda función lineal no constante admite inversa. Además, la inversa es otra función lineal.
   b) Toda función homográfica admite inversa en su dominio. Dar la expresión de dicha inversa indicando su dominio (recordemos que una función homográfica es de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, donde $bc - da \neq 0$, $c \neq 0$).
3. Analizar la inyectividad de una función f sabiendo que:
   a) f es par.
   b) f es impar.
4. Consideramos $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$.
   a) Encontrar dominio e imagen de f para los distintos valores de n.
   b) Comprobar que si n es par, f es par; y que si n es impar, f es impar.
   c) Analizar si f admite inversa, para los casos n par e impar, en todo su dominio o si hace falta elegir un dominio adecuado para poder definir una inversa.
   Sugerencia: Utilizar el ejercicio anterior.
   d) Llamemos $g(x) = x^{1/n}$ a la función hallada en el inciso anterior. Indicar el dominio y la imagen de g para los distintos valores de n.
   e) Graficar aproximadamente dichas funciones.
   f) ¿Cómo podría definir x^q para $q \in \mathbb{Q}$? ¿Cuándo esta función tiene inversa?
5. Descríbase la gráfica de f^{-1} cuando:
   a) f es estrictamente creciente y siempre positiva.
   b) f es estrictamente creciente y siempre negativa.

c) f es estrictamente decreciente y siempre positiva.
d) f es estrictamente decreciente y siempre negativa.

6. Demostrar que si f es estrictamente creciente, entonces también lo es f^{-1}, y análogamente para funciones estrictamente decrecientes.
7. Si f y g son crecientes, ¿lo es $f+g$? ¿$f \cdot g$? ¿$f \circ g$?
8. ¿En qué intervalos $[a,b]$ serán uno-a-uno las siguientes funciones?
   a) $f(x) = x^3 - 3x^2$
   b) $f(x) = x^5 + x$
9. *a*) Demuestre que $h(x) = x^3/4$ y $k(x) = (4x)^{\frac{1}{3}}$ son inversas una de la otra.
   b) Grafique h y k sobre un intervalo lo suficientemente grande para mostrar que se intersecan en los puntos $(2,2)$ y $(-2,-2)$. El dibujo debe mostrar la simetría requerida respecto de la recta $y = x$.
   c) Determine las pendientes de las tangentes a las gráficas de h y k en $(2,2)$ y $(-2,-2)$.
   d) ¿Qué rectas son tangentes a las curvas en el origen?
10. Suponga que la función derivable $y = g(x)$ tiene inversa, y que la gráfica de g pasa por el origen con pendiente 2. Determine la pendiente de la gráfica de g^{-1} en el origen.
11. Sea $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1,\ x \geq 2$. Determine el valor de $(f^{-1})'$ en el punto $a = -1 = f(3)$.



Práctica 6

Convexidad y concavidad

1. Dadas las siguientes funciones, encontrar, si existen, los puntos de inflexión.
   a) $f(x) = (x^2-4)^2$
   b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$
   c) $f(x) = x(x+1)^{\frac{1}{2}}$
2. Graficar la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si } x < 0, \\ x^3 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

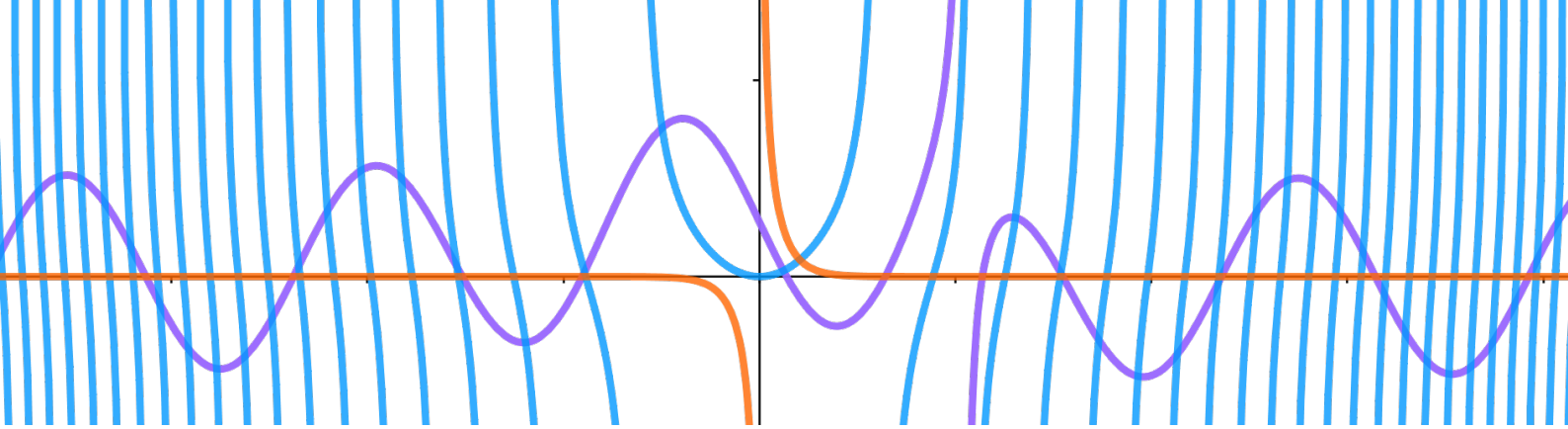
   Mostrar que f'' no existe en $x = 0$. Analizar si en $x = 0$ hay un punto de inflexión.
3. Sea $f : (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$ una función dos veces derivable y sea $x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$. Demostrar que
   a) si $f''(x_0) < 0$ entonces f alcanza en x_0 un máximo local;
   b) si $f''(x_0) > 0$ entonces f alcanza en x_0 un mínimo local.

   Si $f''(x_0) = 0$, dar ejemplos que muestren que en x_0 puede haber un máximo, un mínimo o ninguno de ellos. En tal caso habrá que clasificar el punto x_0 mediante el crecimiento o decrecimiento de la función o el signo de su derivada primera.
4. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$.
   a) Mostrar que f es convexa si y sólo si f^{-1} es cóncava. Interpretar gráficamente.
   b) Si además f es derivable dos veces, dar otra pueba de (a) utilizando el criterio de la segunda derivada.
5. Sean f y g dos funciones convexas.
   a) Demostrar que si g es creciente, entonces $g \circ f$ es convexa.
   b) Dar un ejemplo en el que $g \circ f$ no sea convexa.
   c) Supongamos, además, que f y g son dos veces derivables. Dar otra demostración del resultado del punto $a)$ teniendo en cuenta las derivadas segundas.
6. Hacer un estudio completo y un gráfico aproximado de las siguientes funciones. Clasificar los extremos locales utilizando el criterio de la segunda derivada cuando sea posible.
   a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$
   b) $g(x) = x^4 - 2x^2 + 2$
   c) $h(x) = \dfrac{x}{x^3+1}$
   d) $j(x) = \dfrac{8}{x^2+4}$

e) $k(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

Optimización

7. Calcular la distancia del punto $(1,2)$ a la parábola de ecuación $y = \dfrac{x^2}{4}$.
8. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 16 y
   a) su suma sea mínima.
   b) la suma de uno de ellos con el cuadrado del otro sea mínima.
9. Se va a un fabricar una lata cilíndrica con tapa que contenga un volumen de un litro de aceite. Encuentre las dimensiones que debe tener la lata de manera que minimicen el costo del metal para fabricarla.
10. Un trozo de alambre de 10 metros de longitud se corta en dos partes. Con una parte se hace una circunferencia y la otra se dobla en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortarse el alambre de modo que el área total de las dos figuras sea máxima? ¿Y para que sea mínima?
11. Se consideran todos los rectángulos que tienen su base sobre el eje de las abscisas y sus otros dos vértices por encima del eje x sobre la parábola $y = 4 - x^2$. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima?
12. Encontrar los puntos de la curva $x \cdot y = 1$ más cercanos al origen de coordenadas.
13. Hallar sobre la recta $y = x+2$ el punto que se encuentra más próximo al $(\frac{1}{2},2)$. Demostrar que la recta que pasa por el punto hallado y el $(\frac{1}{2},2)$ es perpendicular a $y = x+2$.



CC +Mate - Prácticas 5 y 6

Aproximación de raíces

Uno de los problemas básicos en matemáticas es resolver ecuaciones. Usando las fórmulas de la ecuación cuadrática, sabemos cómo encontrar una raíz (o solución) de una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$. Hay fórmulas más complicadas para resolver ecuaciones cúbicas o cuárticas (polinomios de grado 3 o 4), pero el matemático noruego Niels Abel probó que no existe una fórmula para resolver polinomios de grado cinco. Tampoco hay un fórmula para resolver ecuaciones como $\operatorname{sen} x^2 = x$ que involucre funciones transcendentes así como polinomiales u otras funciones algebraicas. Nuestro problema es entonces resolver en forma aproximada ecuaciones de la forma $f(x)=0$ para f una función definida en algún conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Supongamos que se quiere encontrar sus raíces, es decir los valores de $x \in A$ tales que $f(x)=0$.

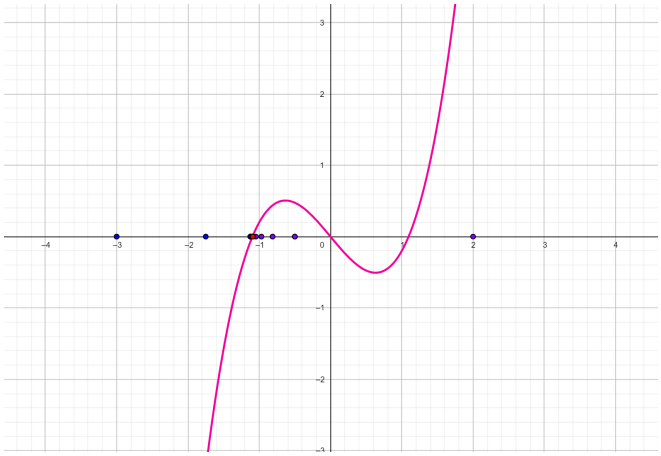
Ya conocemos que si f es continua en A el teorema de Bolzano es una herramienta para encontrar un intervalo $[a,b]$ en donde f se anule. Basta hallar $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$ tales $f(a)$ y $f(b)$ tengan signos opuestos. Esta condición la resumimos pidiendo $f(a)\cdot f(b)<0$. Veamos cómo aplicar este resultado teórico para hallar raíces en forma aproximada.

El método, llamado de **bisección o dicotómico**, consiste en lo siguiente:

- Debemos probar la hipótesis de continuidad de la función f en el intervalo $[a,b]$.
- A continuación se verifica que $f(a)\cdot f(b)<0$.
- Se calcula el punto medio $m=\frac{a+b}{2}$ del intervalo $[a,b]$ y se evalúa $f(m)$. Si ese valor es igual a cero, ya hemos encontrado la raíz buscada.
  En caso de que no lo sea, verificamos si $f(m)$ tiene signo opuesto con $f(a)$ o con $f(b)$.
- Se redefine el intervalo $[a,b]$ como $[a,m]$ o $[m,b]$ según se haya determinado en cuál de estos intervalos ocurre un cambio de signo de f.
- En este nuevo intervalo se repite el procedimiento.

Al continuar con el proceso, se va obteniendo una secuencia de intervalos cada vez más pequeños $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, ..., $[a_n,b_n]$, ... tales que $f(a_n)\cdot f(b_n)<0$ y la longitud de dichos intervalos es $|b_n-a_n|=\dfrac{b-a}{2^n}$.

Este procedimiento puede ser repetido hasta lograr que $|b_n-a_n|<\varepsilon$, para un valor $\varepsilon>0$ establecido. Esta condición brinda la precisión requerida para la raíz buscada.



Si existieran más de una raíz en el intervalo entonces el método sigue siendo útil pero no resulta tan fácil caracterizar qué raíz se encuentra al emplearlo.

En el siguiente recurso de GeoGebra pueden observar gráficamente la aplicación del método de bisección.

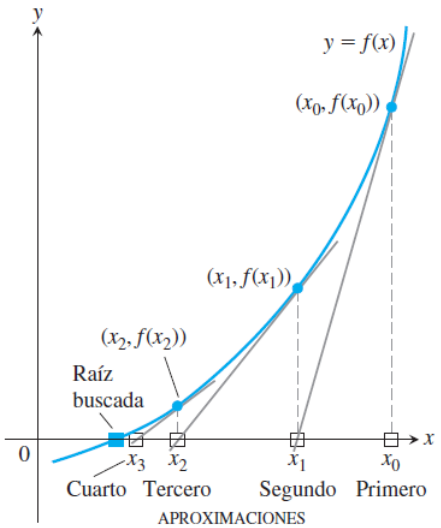
`https://www.geogebra.org/classic/m4freyug`

Veamos ahora otro método para aproximación de raíces, en donde aplicamos la idea de recta tangente. Éste es conocido con del nombre de método de **Newton - Raphson** y consiste en elegir un valor inicial $x_0 \in A$, encontrar la recta L tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. Luego buscamos la intersección de L con el eje x, a dicho valor lo llamamos x_1 y repetimos el procedimiento. Así se obtiene una sucesión de puntos de la forma $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Las condiciones para aplicar el método de Newton-Raphson, suponiendo que f es continua en $[a,b]$ y admite primera y segunda derivadas en $(a.b)$, son las siguientes:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$, es decir, f tiene una raíz en (a,b).
- $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$, es decir, f es estrictamente monótona en (a,b).
- $f''(x) \neq 0,\ \forall x \in (a,b)$. Esto es, la función es cóncava o convexa, pero no tiene puntos de inflexión en el intervalo.

Entonces, existe una única raíz α de f en $[a,b]$ y la sucesión de valores x_n generada por el método de Newton tiende (o converge) hacia α, para cualquier valor inicial $x_0 \in [a,b]$ que cumpla que $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.



Ejemplo: Aplicamos el método de **Newton - Raphson** para hallar el valor de $\sqrt[6]{2}$ con hasta siete cifras decimales correctos.

Para ello definimos $f(x) = x^6 - 2$ y buscamos sus raíces aplicando el algoritmo tomando como punto inicial $x_0 = 1$.

Observemos que f es una función continua y derivable dos veces en todo su dominio por ser un polinomio. Además, $f'(x) = 6x^5 \neq 0$, $f''(x) = 30x^4 \neq 0$ en un intervalo abierto que no contenga a 0, por ejemplo podemos trabajar en el intervalo [1,2]. Luego, se tiene:

$x_1 = 1 - \frac{1^6-2}{6\cdot 1^5} \approx 1,1666,$

$x_2 = 1,1666 - \frac{1,1666^6-2}{6\cdot 1,1666^5} \approx 1,12249,$

$x_3 = 1,12249 - \frac{1,12249^6-2}{6\cdot 1,12249^5} \approx 1,122446,$

$x_4 = 1,122446 - \frac{1,122446^6-2}{5\cdot 1,122446^5} \approx 1,1224605,$

$x_5 = 1,1224605 - \frac{1,1224605^6-2}{5\cdot 1,1224605^5} \approx 1,1224605.$

Como x_4 y x_5 coinciden hasta 7 decimales, hemos encontrado la aproximación deseada.

Observación: en este ejemplo comenzamos a iterar en el valor $x_0 = 1$ que no cumple la condición $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Les proponemos que rehagan los cálculos para un valor inicial que sí la cumpla y comparen el número de iteraciones (o pasos) que se necesitan para llegar a la aproximación propuesta de la raíz.

En el siguiente recurso de **GeoGebra** podrán aplicar este método a distintas funciones e interpretarlo geométricamente.

`https://www.geogebra.org/classic/ujssrgmb`

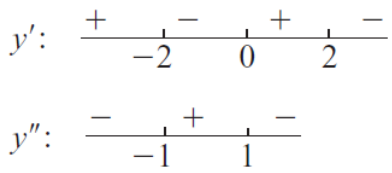
Ejercicios

1. **Estimación de pi.** Se quiere estimar $\pi/2$ con cinco lugares decimales usando el método de Newton para resolver la ecuación $\cos x = 0$. ¿Importa con qué valor se empieza? Justifique su respuesta.
2. **Oscilación.** Demuestre que si $h > 0$, aplicar el método de Newton a la función $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ para encontrar su raíz lleva a $x_1 = -h$ si $x_0 = h$ y $x_1 = h$ si $x_0 = -h$.
   Grafique para mostrar qué está ocurriendo. ¿Puede aplicar el método de bisección en un intervalo adecuado?
3. **Curvas que se intersecan.** La curva $y = \tan x$ interseca a la recta $y = 2x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/2$. Use el método de Newton para encontrar dónde.
4. **El problema de la boya de sonar.** Cuando se necesita localizar un submarino, frecuentemente es necesario encontrar el punto más cercano de la trayectoria entre éste y una boya de sonar (detector de sonido) en el agua. Suponga que el submarino viaja por la trayectoria de la parábola $y = x^2$ y que la boya está localizada en el punto $(2, -\frac{1}{2})$.
   a) Demuestre que el valor de x que minimiza la distancia entre el submarino y la boya es una solución de la ecuación $x = \frac{1}{x^2+1}$.
   b) Resuelva la ecuación $x = \frac{1}{x^2+1}$ con el método de Newton.
5. Encuentre los extremos relativos y absolutos de las funciones dadas en los intervalos indicados.
   a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 4x + 2$ en $[-20/25;\ 64/25]$.
   b) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1$ en $[-3/4;\ 3]$.
   c) $f(x) = \sqrt{x} + \cos x$ en $[0, 2\pi]$.

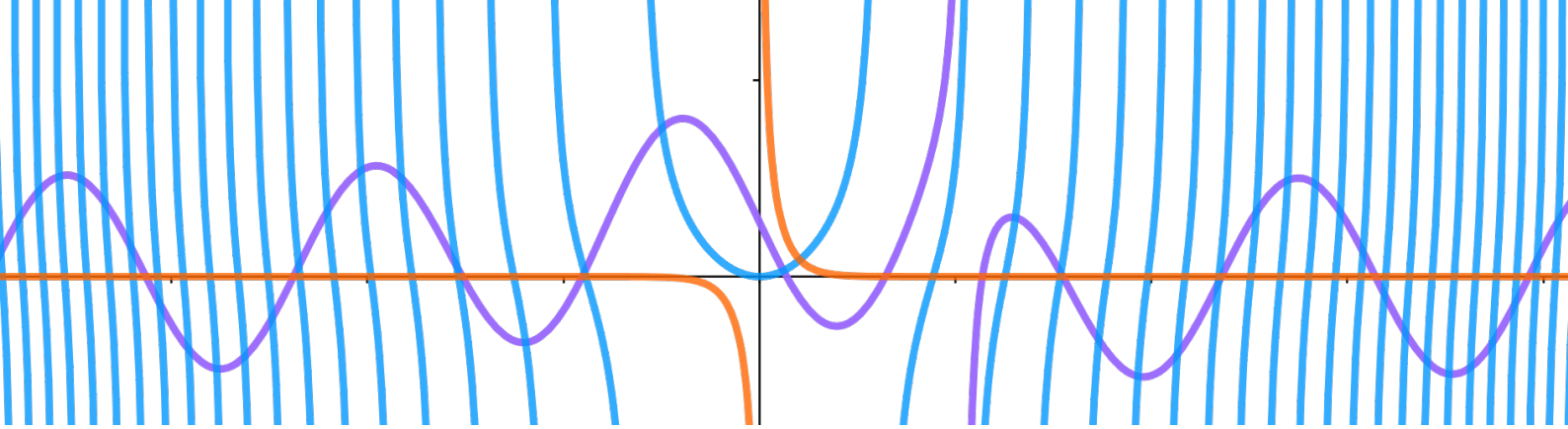
   Sugerencia: puede aplicar alguno de los métodos anteriores para encontrar los ceros de f'.

Otras aplicaciones de la derivada

6. Grafique una función dos veces derivable $y = f(x)$ que pasa por los puntos $(-2,2)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ y $(2,2)$ cuyas dos primeras derivadas tienen estos signos:



7. Suponga que la derivada de la función $y = f(x)$ es $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$. ¿En qué puntos, si existen, f alcanza un mínimo local o un máximo local o tiene un punto de inflexión?
8. La altura de un objeto t segundos después de dejarlo caer desde una altura de 500 metros es $s(t) = -4{,}9t^2 + 500$.
   a) ¿Para qué valores de t está definida la función $s(t)$?
   b) Calcular la velocidad media del objeto durante los 3 primeros segundos.
   c) Verificar que en algún momento de esos 3 primeros segundos estaba cayendo a una velocidad igual a la velocidad media calculada antes. ¿En qué instante ocurre esto?
9. **Movimiento de un proyectil lunar.** Una roca se lanza verticalmente hacia arriba desde la superficie lunar, a una velocidad de 24 m/seg (alrededor de 86 km/h); el proyectil alcanza una altura de $s = 24t - 0{,}8t^2$ metros en t segundos.
   a) Encuentre la velocidad y la aceleración de la roca en el tiempo t. (En este caso, la aceleración es la de la gravedad en la Luna).
   b) ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar el punto más alto?
   c) ¿Qué altura alcanza?
   d) ¿Cuánto tarda la roca en alcanzar la mitad de la altura máxima?
   e) ¿Cuánto tiempo está la roca en el aire?
10. **La fórmula de la caída libre de Galileo.** Galileo desarrolló una fórmula para determinar la velocidad de un cuerpo durante la caída libre, rodando hacia abajo pelotas, desde el reposo, por un tablón inclinado, y buscando una fórmula límite que pronosticara el comportamiento de las mismas cuando el tablón estuviera en posición vertical y aquellas cayeran libremente. Galileo descubrió que, para cualquier ángulo dado del tablón, la velocidad de la pelota durante t segundos de movimiento era un múltiplo constante de t. Esto es, la velocidad estaba dada por una fórmula de la forma $v = kt$.
    El valor de la constante k dependía de la inclinación del tablón. En notación moderna, con la distancia en metros y el tiempo en segundos, lo que Galileo determinó experimentalmente fue que, para cada ángulo dado θ la velocidad de la pelota, a t segundos de empezar a rodar, era $v = 9{,}8(\operatorname{sen}\theta)t$ m/seg.
    a) ¿Cuál es la ecuación para la velocidad de la pelota en caída libre?
    b) ¿Cuál es la aceleración constante que un cuerpo experimenta en caída libre cerca de la superficie de la Tierra?



Práctica 7

Derivadas e inversas de funciones trigonométricas

1. Dadas las siguientes funciones, determinar el dominio de definición, el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la derivada.

   a) $f(x) = \dfrac{x+\cos(x)}{\cos(x)\,\mathrm{sen}(x)}$
   b) $j(x) = \cos\left((2x+3)^2\right)$
   c) $g(x) = \tan\left(\mathrm{sen}\,\sqrt{x}\right)$
   d) $f(x) = \sec\left(x^2+1\right)$
   e) $h(x) = \mathrm{sen}^3\left(\sqrt{x-2}\right)$
   f) $g(x) = \cos^2\left(\sqrt{x}\right)$

2. Dada $f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}(3x)+2, & x<0 \\ (x+\frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}, & x \geq 0 \end{cases}$
   a) Analizar la continuidad de f en $\mathbb{R}$.
   b) Determinar el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la función derivada.
   c) Graficar la función.

3. Hallar los siguientes valores:

   a) $\mathrm{arc\,sen}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
   b) $\mathrm{arc\cos}\left(\dfrac{1}{2}\right)$
   c) $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$
   d) $\mathrm{arc\,sen}\left(\mathrm{sen}\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)\right)$
   e) $\mathrm{arc\cos}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

4. Hallar la derivada de las funciones $f(x) = \mathrm{arc\,sen}\,(x), g(x) = \mathrm{arc\cos}\,(x)$ y $h(x) = \arctan\,(x)$.
5. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en el punto de abscisa indicado:
   a) $f(x) = \arctan(x), x = -1$
   b) $f(x) = \mathrm{arc\,sen}(x), x = -\dfrac{1}{2}$
   c) $f(x) = \mathrm{arc\cos}(x),\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
6. Hallar las derivadas de las siguientes funciones

   a) $f(x) = \arctan\left(\mathrm{sen}(2x)\right)$
   b) $f(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$
   c) $f(x) = x\,\mathrm{arc\,sen}\left(\cos(x) - 2x\right)$

7. Probar las siguientes desigualdades:
   a) $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)$ si $x \geq 0$.

b) $\tan(x) > x$ si $0 < x < \pi/2$.

Estudio y gráfico de funciones

8. Graficar las siguientes funciones explicitando en cada caso, si es posible:
   - Dominio. Puntos de discontinuidad. Intersecciones con los ejes coordenados. Simetrías.
   - Puntos críticos. Máximos y mínimos, locales y absolutos.
   - Regiones de crecimiento y de decrecimiento.
   - Comportamiento de la función cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
   - Valores de x en los cuales la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, a izquierda o a derecha (asíntotas verticales).
   - Asíntotas oblicuas.
   - Regiones de convexidad y de concavidad. Puntos de inflexión.

   a) $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$

   b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$

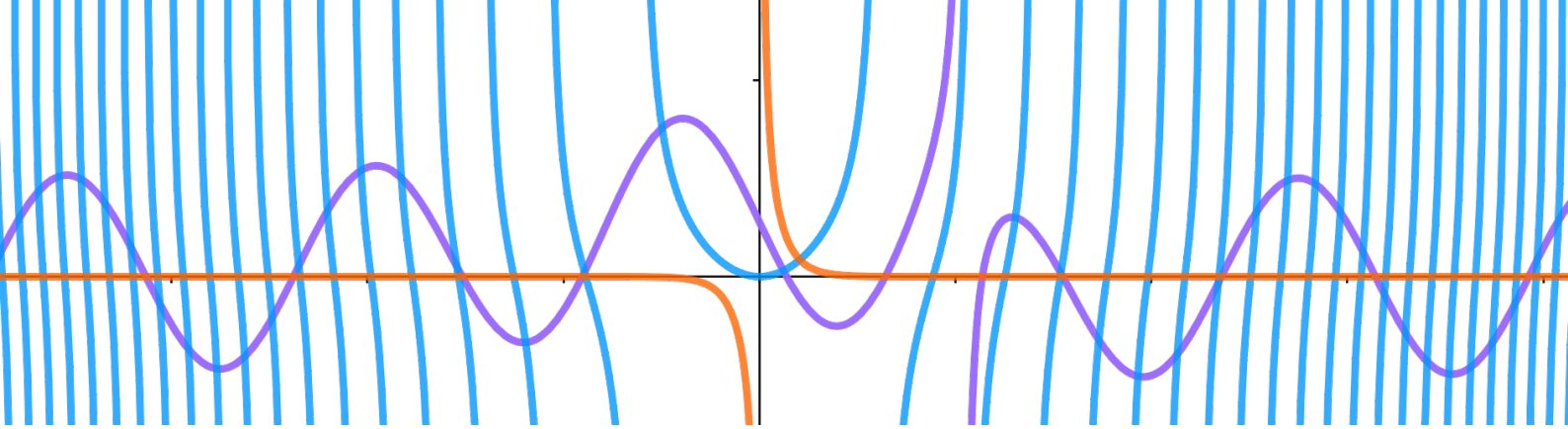
   c) $f(x) = x^{2/3} + (x-1)^{2/3}$

   d) $f(x) = \operatorname{sen}^2(x)$

   e) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}$

   f) $f(x) = 2 + \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$. Analizar en $[-\pi, \pi]$ y deducir un gráfico aproximado en su dominio.

   g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$



Práctica 8

Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Resolver las siguientes ecuaciones utilizando propiedades de las funciones logaritmo y exponencial:

   a) $e^{x+7} = \dfrac{1}{e^2}$
   b) $4.3^{x+1} = 12$
   c) $\ln(x^2-4x-4) = 0$
   d) $\ln(x^2+x) - \ln(x) = \ln(5)$
   e) $2^{x+1} + 2^x = 12$
   f) $2 \cdot 49^x + 5 \cdot 7^{x+1} = 37$

2. Explicitar el dominio de definición y de derivabilidad de las siguientes funciones y dar una expresión para la derivada.

   a) $f(x) = \ln(x^2+1)$
   b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$
   c) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$
   d) $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$
   e) $f(x) = 2^x - x^2$
   f) $f(x) = e^{\ln(7)x}$

3. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3e^{x+1} - x$ paralela a la recta de ecuación $y = 2x+1$.
4. Hallar la ecuación de una recta tangente a la gráfica de $g(x) = x\ln x$ perpendicular a la recta de ecuación $y = -\frac{1}{2}x - 7$.
5. Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x > 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \ln(3x+1), & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ e^x - x - 1, & x > 0 \end{cases}$$

   a) Analizar la continuidad y clasificar las discontinuidades.
   b) Determinar el dominio de derivabilidad y dar una expresión para la derivada de cada una de las funciones.

6. Sea f una función continua en $[1,2]$, derivable en $(1,2)$ tal que $f(1) = f(2)$ y positiva en todo su dominio. Consideremos $G(x) = \ln(f(x))$. Probar que existe un $c \in (1,2)$ tal que $G'(c) = 0$.
7. Considerar las siguientes funciones:

- Seno hiperbólico: $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Coseno hiperbólico: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

a) Mostrar que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.
b) Mostrar que $(\cosh(x))' = \operatorname{senh}(x)$ y $(\operatorname{senh}(x))' = \cosh(x)$.
c) Las inversas de estas funciones se denominan arcoseno hiperbólico (arcsenh), arcocoseno hiperbólico (arccosh) y arcotangente hiperbólica (arctanh).
Determinar para cada función inversa: dominio de definición, dominio de la derivada y una fórmula explícita para la derivada.

Crecimiento exponencial

8. Sean f una función definida en algún intervalo de la recta real, K una constante y supongamos que $f'(t) = Kf(t)$ en el intervalo mencionado. Probar que existe una constante C tal que $f(t) = Ce^{Kt}$.
Sugerencia: considerar la función $F(t) = \dfrac{f(t)}{e^{Kt}}$ y mostrar que $F'(t) = 0$. Luego podemos asegurar que existe una constante C tal que $F(t) = C$. Por lo tanto se deduce que $f(t) = Ce^{Kt}$.
9. Una substancia radiactiva se desintegra proporcionalmente a la cantidad de substancia presente en un instante dado, digamos $f(t) = Ce^{Kt}$.
   a) ¿En qué instante habrá exactamente la mitad de la cantidad original presente?
   b) Suponer que $K = -4$. ¿En qué instante habrá un tercio de la substancia?
10. Una colonia de bacterias crece bajo condiciones ideales en un laboratorio, de modo que la población aumenta de forma exponencial con el paso del tiempo. Después de 3 horas hay 10.000 bacterias. Después de 5, hay 40.000. ¿Cuántas bacterias había al principio?
11. La población de cierta ciudad se duplica cada 10 años y en 1940 tenía 100.000 habitantes.
   a) Determinar la población en 1980.
   b) Expresar la población en función del tiempo (en años).
   c) Dibujar la curva de población. ¿La población, crece o decrece con respecto al tiempo?

Estudio y gráfico de funciones

12. Graficar las siguientes funciones explicitando en cada caso, si es posible:
   - Dominio. Puntos de discontinuidad. Intersecciones con los ejes coordenados. Simetrías.
   - Puntos críticos. Máximos y mínimos, locales y absolutos.
   - Regiones de crecimiento y de decrecimiento.
   - Comportamiento de la función cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.
   - Valores de x en los cuales la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$, a izquierda o a derecha (asíntotas verticales).
   - Asíntotas oblicuas.
   - Regiones de convexidad y de concavidad. Puntos de inflexión.

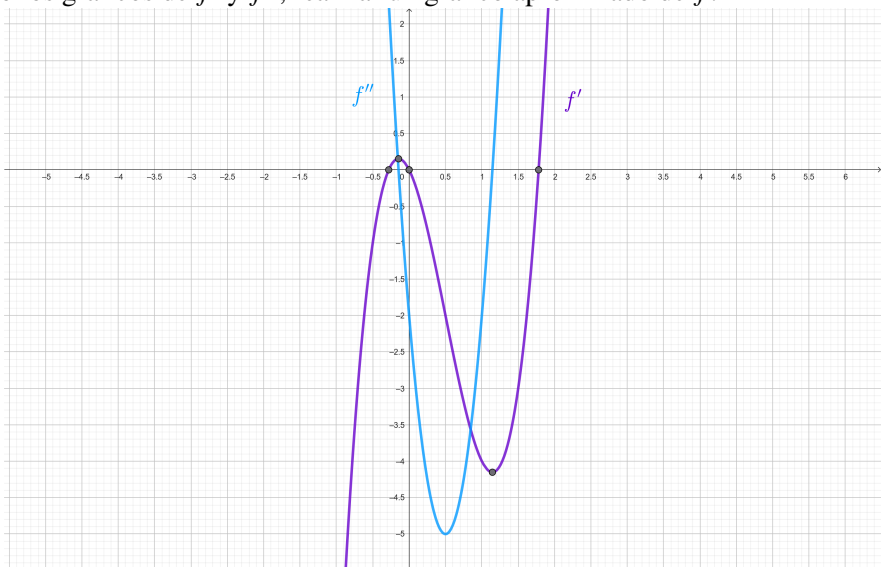
   a) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$
   b) $f(x) = xe^{-x^2}$
   c) $f(x) = x^x$
   d) $f(x) = x^{-x}$
   e) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$
   f) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

CC +Mate - Prácticas 7 y 8

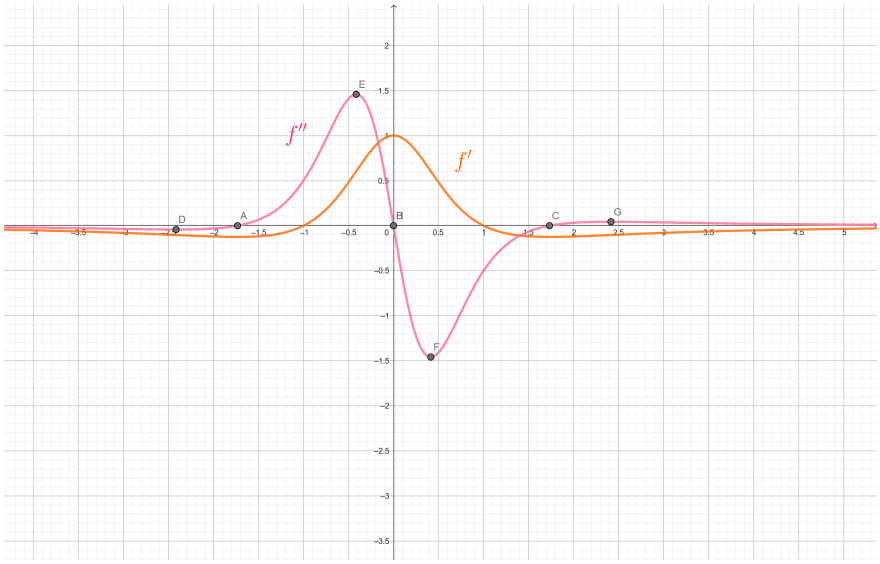
Relaciones entre una función y sus derivadas

1. Analizando los gráficos de f' y f'', realizar un gráfico aproximado de f.

a)



b)



Límites en el infinito

2. Analizar los siguientes límites
   a) $\lim_{x\to+\infty} x^2\,\frac{1}{x}$
   b) $\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{x}$
   c) $\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{1}{x^2}$
   d) Qué se puede decir del $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)$ cuando $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$?
3. *a)* Hallar, si existen, los siguientes límites.
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4+4x^3}{x^6-7x^{4/3}+1}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{14x^5-12x^2+4}{2x^4-13x+4}$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+3x^2-2}{3x^3-12x+2}$
   ¿Qué sucede si $x\to-\infty$?
   b) Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ de grados m y n respectivamente, analizar el comportamiento de la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ cuando $x\to+\infty$ si $m>n$, $m=n$ y $m<n$.
4. *a)* Calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\operatorname{sen} x$
   b) Demostrar que $\lim_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$ si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ y $g(x)$ es una función acotada.
5. Calcular, si existen, los siguientes limites:
   a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x+\operatorname{sen}^2 x}{5x+6}$.
   b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x\operatorname{sen} x}{x^2+5}$.
   c) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.
   d) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(1+\operatorname{sen}^2 x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$.

Límites en el infinito y orden de magnitud

6. Hallar, si existen, los siguientes límites:

   (a) $\lim_{x\to0^+} x^n\ln(x)$, n natural (b) $\lim_{x\to+\infty} \ln(1+e^x)-x$ (c) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{4}{x}\right)^{-x}$

   (d) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{x}$ (e) $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{x/2}$ (f) $\lim_{x\to0} xe^{1/x}$

   (g) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+2\ln(x)}{2^x+\sqrt{x}}$ (h) $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[x]{a}-1)$, $a>0$.

Funciones exponenciales generales

7. Graficar en GeoGebra las funciones:
   a) $f(x)=2^x$
   b) $g(x)=4^x$
   c) $k(x)=(\frac{1}{2})^x$
   d) $l(x)=(\frac{1}{4})^x$
8. ¿Cómo es la gráfica de $f(x)=a^x$ si
   a) $a>1$?
   b) $0<a<1$?
   Estudiar estos casos con GeoGebra usando un deslizador para a.

9. Observar utilizando GeoGebra qué ocurre con las gráficas de las funciones a^x, $-a^x$, $1/a^x$ y $-1/a^x$ creando un deslizador para a entre 0 y 2.
10. Graficar en GeoGebra la función $f(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$ para distintos valores de $a > 0$. Comparar estas gráficas con las realizadas en el ejercicio anterior, observando qué tipo de simetría existe. Puede utilizar el comando *Refleja [f(x),y=x]* para reflejar la gráfica de una función con respecto a la recta y=x. ¿Qué observa? Aplicando la definición de función inversa, puede deducir alguna expresión para el cambio de base de logaritmo?

Modelos exponenciales

Transferencia de calor: ley de enfriamiento de Newton. Cuando se deja sopa en un tazón metálico, ésta se enfría hasta llegar a la temperatura ambiente. Un lingote de plata caliente sumergido en una gran cantidad de agua, se enfría hasta alcanzar la temperatura del líquido. En situaciones como éstas, la velocidad a la que la temperatura de un objeto cambia en cualquier instante es casi proporcional a la diferencia entre su temperatura y la temperatura del medio que lo rodea. Aunque también se aplica al fenómeno de calentamiento, esta observación se denomina ley de enfriamiento de Newton y hay una ecuación para ella:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - T_\infty),$$

donde:

- $T(t)$: Temperatura del objeto en el tiempo t
- T_∞: Temperatura ambiente (del entorno)
- k: Constante de enfriamiento (depende del material y del entorno)
- $\frac{dT}{dt}$: Tasa de cambio de temperatura

El signo negativo indica que el objeto se enfría (la temperatura disminuye) con el tiempo. Esta ecuación (diferencial) que estudiaremos más adelante, tiene como solución a la función

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-kt},$$

siendo T_0 es la temperatura inicial del objeto. Esto muestra que la diferencia de temperatura entre el objeto y el entorno disminuye de forma exponencial con el tiempo.
Aplicar este modelo para resolver el siguiente problema.

11. Un huevo cocido a $98°C$ se sumerge en agua cuya temperatura es de $18°C$. Después de 5 minutos, la temperatura del huevo es de $38°C$. Suponiendo que el agua no se calienta de forma apreciable, ¿cuánto tardará la temperatura del huevo en llegar a $20°C$?

Interés compuesto de forma continua. Si usted invirtiera una cantidad de dinero A_0 a una tasa de interés anual fija (expresada como un decimal), y si el interés se agregara a su cuenta k veces al año, la fórmula para calcular la cantidad de dinero que tendría al final de t años es

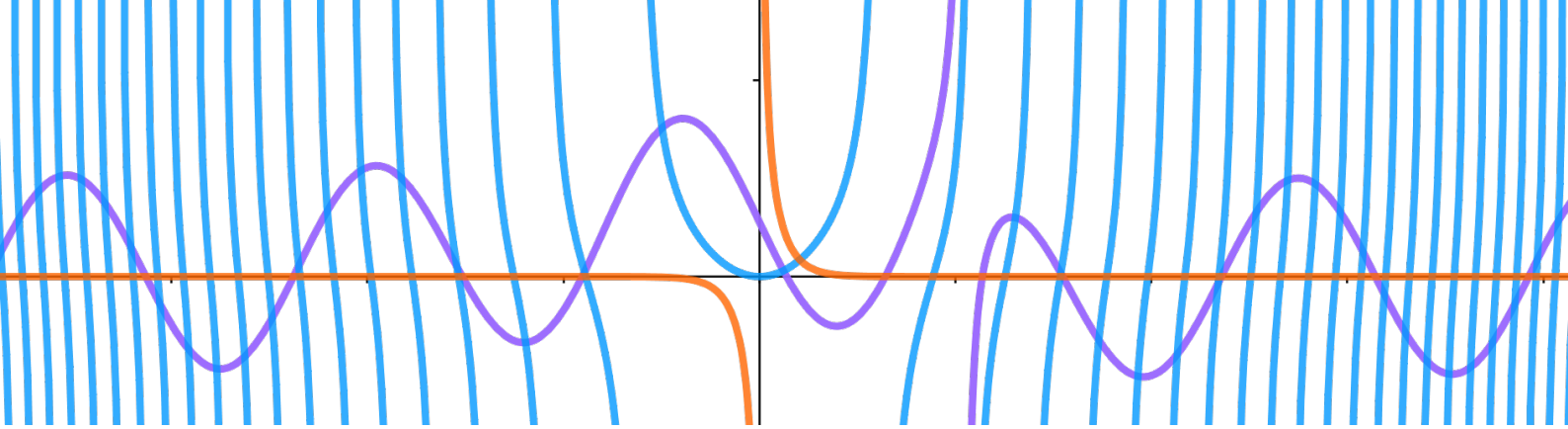
$$A_t = A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

El interés podría añadirse (los banqueros dicen "componerse" o "capitalizarse") cada mes ($k = 12$), cada semana ($k = 52$), cada día ($k = 365$). Tomando el límite cuando el interés se compone cada vez con mayor frecuencia, llegamos a la siguiente expresión para determinar la cantidad de dinero acumulado al cabo de t años:

$$\lim_{k\to+\infty} A_t = \lim_{k\to+\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = \lim_{k\to+\infty} A_0\left[\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r}}\right]^{rt} = A_0e^{rt}.$$

La fórmula resultante para determinar la cantidad de dinero que habrá en su cuenta al cabo de t años es $A(t) = A_0e^{rt}$ y decimos que el interés que se paga se compone de manera continua. El número r se denomina tasa de interés continua.

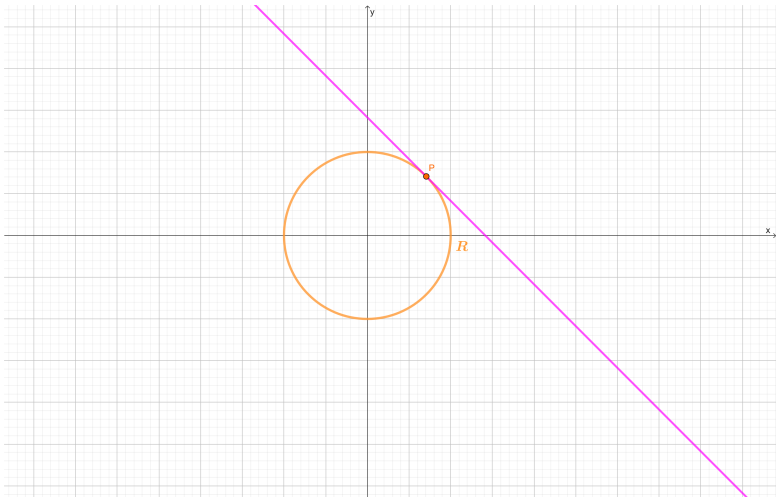
12. Suponga que usted acaba de depositar A_0 dólares en una cuenta de banco que paga 4 % de interés compuesto de manera continua. Responda a las siguientes preguntas:
    a) ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta dentro de 5 años?
    b) ¿Cuánto tardará en duplicarse la cantidad original?
13. John Napier (1550-1617), el hacendado escocés que inventó los logaritmos, fue la primera persona en responder esta pregunta: ¿qué pasa si se invierte una cantidad de dinero a 100 % de interés compuesto continuo?
    a) ¿Qué pasa? ¿Cuánto tarda en triplicarse el dinero?
    b) ¿Cuánto se puede ganar en un año?



Práctica 9

Derivación Implícita

Hasta ahora hemos estudiado funciones de la forma $y = f(x)$, cuya gráfica es una curva del plano. Pero también conocemos curvas que no están dadas por la gráfica de una función de este tipo, si no que están representadas por una relación entre x e y de la forma $F(x,y) = 0$, como por ejemplo, una circunferencia de radio $R > 0$ y centro en el origen de coordenadas.



Supongamos que dado un punto de la curva queremos encontrar su recta tangente, suponiendo que esta existe. Si consideramos el gráfico de la curva "alrededor" del punto que nos interesa, podemos pensar que esta porción de curva es el gráfico de cierta función del tipo $y = y(x)$. Veamos entonces cómo encontrar la expresión $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ derivando una función que no conocemos, pues no tenemos su expresión explícita. Este procedimiento se conoce como derivación implícita.

Dada una ecuación $F(x,y) = 0$, se realizan los siguientes pasos:

- Derivamos ambos lados de la ecuación con respecto a x, aplicando la regla de la cadena para los términos que contienen y, pues suponemos que la función $y = y(x)$ existe y es derivable en un entorno de la abscisa del punto P en cuestión.
- Recordamos que y es función de x, por lo tanto al derivar términos con y, aparece $y' = \dfrac{dy}{dx}$.
- Agrupamos los términos con y' y despejamos para encontrar su expresión.

Observación: Como suponemos que la función $y = y(x)$ existe y es derivable en un entorno de la abscisa de cierto punto P, la función compuesta $F(x, y(x))$, que depende sólo de x, es derivable, si la función F cumple ciertas hipótesis de regularidad. En estos casos, que son los que estudiaremos, podemos aplicar la regla de la cadena para hallar la expresión de su derivada en dicho entorno.

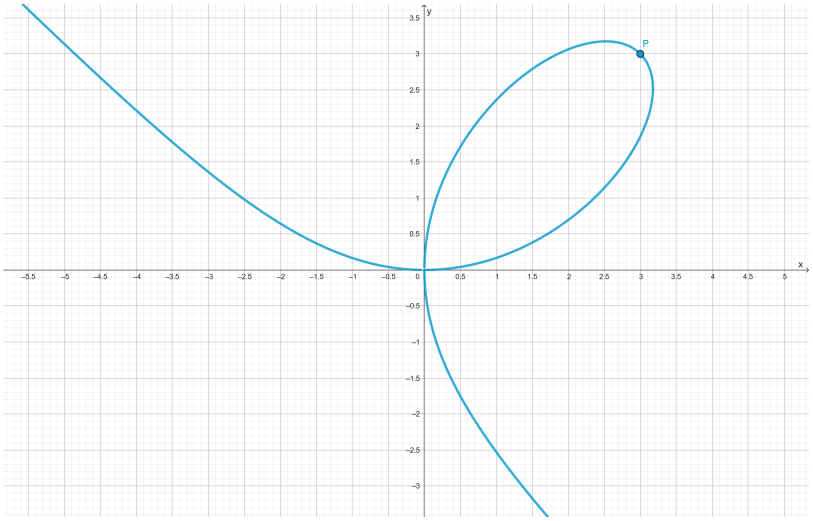
Ejemplo: Si $x^2 + y^2 = R^2$, derivamos ambos miembros de la igualdad respecto de x:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(R^2) \Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \text{ si } y \neq 0.$$

Observación: ¿Puede explicar gráficamente qué ocurre en los puntos de la circunferencia que están sobre el eje x?

La derivación implícita nos permite encontrar la pendiente de la recta tangente en un punto P de curvas que no están expresadas como funciones explícitas de x. Podemos utilizarla para analizar curvas como circunferencias, elipses y curvas algebraicas. Esta técnica es utilizada en el análisis de curvas complejas, optimización, y problemas físicos donde las relaciones entre variables no son explícitas. También se puede aplicar a derivadas de orden superior.

Ejemplo: Consideremos la siguiente situación: queremos determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 = 6xy$ en el punto $P(3,3)$.



Si consideramos el gráfico de la curva "alrededor" del punto que nos interesa, podemos pensar que este pedacito de la curva es el gráfico de cierta función $y(x)$, como mencionamos anteriormente. Entonces, para los x cercanos a 3, tendremos

$$x^3 + (y(x))^3 = 6x \cdot y(x)$$

Derivando miembro a miembro, usando la regla de la cadena, obtenemos la igualdad

$$3x^2 + 3(y(x))^2 \cdot y'(x) = 6y(x) + 6x \cdot y'(x)$$

de donde podemos encontrar una expresión para $y'(x)$ en función de x e y, dada por

$$y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x}, \text{ si } 3y^2 - 6x \neq 0.$$

Luego, $y'(3) = -1$ y la recta buscada tiene ecuación $y = -x + 6$.

Ejercicios

1. Encuentre la derivada $\dfrac{dy}{dx}$ de la siguiente relación usando derivación implícita:

$$(x^2+y^2)(y^2+1)-2(x^2+1)=2.$$

2. Encuentre la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados:
   a) $2y^2+(xy)^{\frac{5}{3}}=2x^2+17$ en $(0,\sqrt{\frac{17}{2}})$.
   b) $e^{x+y}=x^2+y^2+e-1$ en $(0,1)$.
   c) $y^2=x^3(2-x)$ en $(1,1)$.
   d) $\operatorname{sen}(xy)=x+y$ en $(0,0)$.
   e) $2(x^2+y^2)=\frac{5}{2}(x^2-y^2)$ en $(3,1)$.
3. La siguiente ecuación $x^2+xy+y^2=7$ tiene como gráfico a una elipse.
   a) Determine los puntos donde la tangente tiene pendiente 1. Justifique.
   b) Muestre gráficamente usando GeoGebra que dichos puntos se encuentran sobre la recta $y=-x$.
   c) Calcule las coordenadas exactas de dichos puntos.
4. Una escalera de 3 m se desliza alejándose de una pared vertical a razón de 0,5 m/s. ¿Con qué velocidad baja el extremo superior cuando está a 1,8 m del suelo?

Polinomios de Taylor

5. Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x=0$ de grado menor o igual que 3 para cada una de las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=e^{-x} \qquad b)\ f(x)=x^2e^{-x} \qquad c)\ f(x)=\frac{1}{x+1} \qquad d)\ f(x)=\arctan(x)$$

6. Hallar el polinomio de Taylor de grado menor o igual que 4 alrededor de $x=1$ para la función $f(x)=\ln(x)$. Utilizar este polinomio para aproximar $\ln(9/10)$ y acotar el error cometido.
7. Utilizar un polinomio de Taylor de la función $f(x)=e^x$ alrededor de $x=0$ para:
   a) Calcular el valor del número e con un error menor que 10^{-4}
   b) Calcular el valor de $\sqrt[4]{e}$ con un error menor que 10^{-3}.
8. Considerar las funciones $f(x)=\operatorname{sen}(x)$ y $g(x)=\cos(x)$.
   a) Encontrar las expresiones de sus polinomios de Taylor de grado n de f alrededor de $x=0$.
   b) Para cada función, hallar una cota para el error de aproximación en el intervalo $[0,\pi]$ en términos de n.
9. *a)* Hallar la expresión del polinomio f de grado 3 si sabemos que $f(0)=2$, $f'(0)=f''(0)=6$ y $f'''(0)=-12$.
   b) Sea f un polinomio de grado 2 tal que $f(2)=-1$, $f'(2)=3$ y $f''(2)=4$. Expresar f en potencias de $(x-2)$ y luego en la forma habitual, es decir, en potencias de x.
   c) Utilizando el desarrollo de Taylor, escribir $p(x)=x^4-x^3+2x^2-3x+1$ como un polinomio en potencias de $x-1$.
   d) Sea p un polinomio de grado n. Para $m\geq 1$, ¿cuál es el polinomio de Taylor de grado m de p alrededor de $x=0$?
10. Utilizando desarrollos de Taylor adecuados, calcular los siguientes límites:

$$(a)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \qquad (b)\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} \qquad (c)\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)}{x}$$

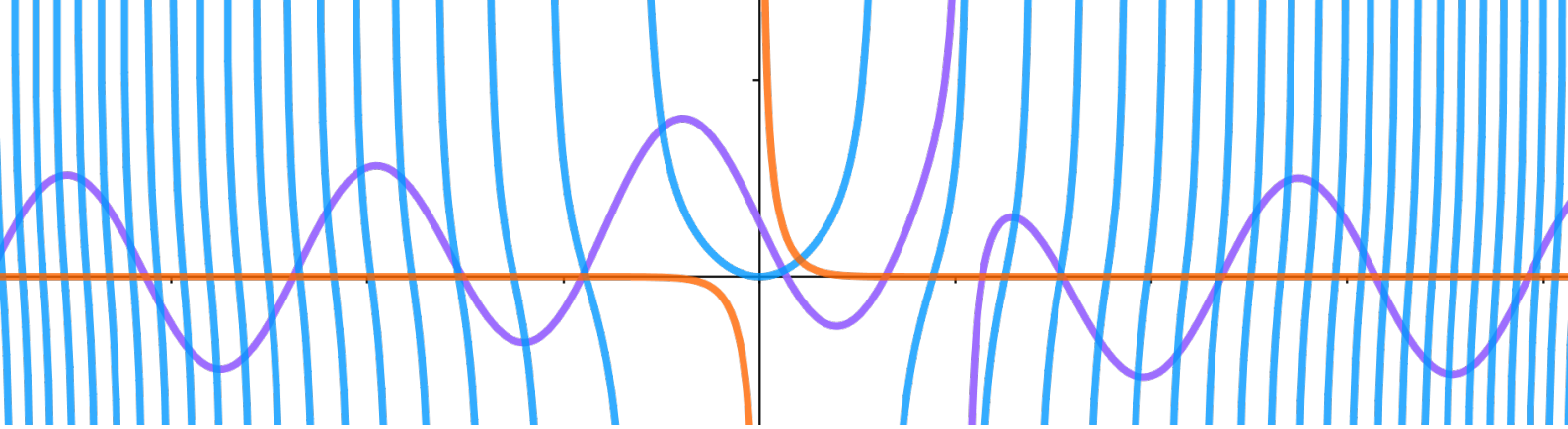
$$(d)\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{e^x-x-1}}{x} \qquad (e)\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x-1)-x+1}{(x-1)^2} \qquad (f)\lim_{x\to 1}\frac{\arctan(x)-\pi/4}{x-1}$$

11. Si el polinomio de Taylor de grado 5 de f en $x = 2$ es

$$p(x) = (x-2)^5 + 3(x-2)^4 + 3(x-2)^2 - 8,$$

calcular $f^{(4)}(2)$ y $f^{(3)}(2)$. ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de grado menor o igual que 7?

12. Hallar los valores de a y b de modo que el polinomio de Taylor de grado 2 de $f(x) = a\ln(1+bx)$ en $x = 0$ sea $p(x) = 2x + \frac{3}{2}x^2$.



CC +Mate - Práctica 9

13. Una función f satisface la ecuación $(5x+1)f'(x)+f(x)=1$. Supongamos que $f(0)=2$ y existe $f^{(5)}(0)$. Hallar el polinomio de Taylor de grado 5 en $x=0$.
14. Sea $f(x)=\sqrt{ax+1}$ y $p(x)=1+2x+bx^2$. Determinar los valores de a y b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de f de grado 2 en $x=0$.
15. Sea $f(x)=3+(x+2)e^{ax}$. Hallar $a\in\mathbb{R}$ sabiendo que la recta tangente en $(0,f(0))$ tiene ecuación $y=5+10x$. Calcular el polinomio de Taylor de grado 2 en $x=0$ de f.
16. Sea $g(x)=1-3x+\sqrt{f(x)}$. Si el polinomio de Taylor de grado 2 en $x=0$ de g es $p(x)=2-x+3x^2$, hallar el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $x=0$.
17. Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ definida por $f(x)=(1+x)^r$, siendo r un número real fijo.
    a) Demostrar que cerca de $x=0$, la función f puede aproximarse con primer grado por $1+rx$, y con segundo grado por $1+rx+\frac{r(r-1)}{2}x^2$.
    b) Interpretar los resultados obtenidos en el inciso anterior cuando $r=1$ y cuando $r=2$.
    c) Estimar el valor de $\sqrt{1,1}$ a grado 2, eligiendo valores adecuados de r y de x. Calcular una cota para el error cometido y comparar con el valor de $\sqrt{1,1}$ que arroja la calculadora.
18. Sea $f(x)=\ln(1+x)$ y sea p su polinomio de Taylor de grado 3 en $x=0$. Demostrar, usando el Teorema generalizado del Valor Medio (teorema de Cauchy), que

$$\frac{f(x)-p(x)}{x^4}=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}$$

    para algún valor de c entre 0 y x.
19. Sea f una función dos veces derivable en x_0, supongamos que x_0 es un punto estacionario de f.
    a) Hallar la expresión del polinomio de Taylor de grado 2 de f alrededor de x_0.
    b) Recordar la relación entre el signo de $f''(x_0)$ y la existencia de un extremo relativo en x_0. Realizar una interpretación geométrica teniendo en cuenta el inciso anterior.

En el siguiente recurso de GeoGebra podrán visualizar los distintos polinomios de Taylor para una función dada.

`https://www.geogebra.org/classic/fyrhafsw`