ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)

TRABAJO PRÁCTICO 9

Ejercicio 1. Determinar, usando fórmulas conocidas para calcular áreas, el área encerrada por la gráfica de la función f y el eje x en el intervalo que se indica.

a) $f(x) = 2 - x \qquad$ en $[0, 2]$.

b) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases} \qquad$ en $[-2, 2]$.

c) $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad$ en $[0, 1]$.

Ejercicio 2. Dos funciones f y g son continuas en el intervalo $[1, 6]$ y cumplen que

$$\int_3^6 f(x)dx = 2, \qquad \int_1^6 f(x)dx = 5, \qquad \int_3^6 g(x)dx = -1$$

Calcular, justificando las propiedades utilizadas:

a) $\displaystyle\int_3^6 (-f(x) + 4g(x))dx$

b) $\displaystyle\int_1^3 (4f(x) + 3)dx$

Ejercicio 3. Se sabe que una función continua f cumple que $\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)dx = 3$.
¿Se puede afirmar que f es positiva en el intervalo $[-1, 2]$? Dibujar gráficas de posibles funciones que cumplan con lo pedido.

Ejercicio 4. Utilizando propiedades de la integral, mostrar que:

a) $\displaystyle\frac{2}{e} \leq \int_{-1}^1 e^{-x^2}\, dx \leq 2.$

b) $\displaystyle 0 \leq \int_1^2 \ln(x)\, dx \leq 1.$

Sugerencia: considerar la monotonía.

Ejercicio 5. Comprobar las condiciones del Teorema del valor medio del cálculo integral para las siguientes funciones. Hallar el valor medio correspondiente y el valor de c donde se alcanza.

a) $f(x) = x - 1$, en el intervalo $[0, 2]$

b) $f(x) = e^x$, en el intervalo $[-1, 1]$

Ejercicio 6. Sea la función

$$f(u) = \begin{cases} -1 & 0 \le u \le 1 \\ 2 & 1 < u \le 2 \end{cases}.$$

Hallar el valor medio M correspondiente a [0,2] y comprobar que no existe ningún c en el intervalo tal que $f(c) = M$. ¿Hay alguna contradicción con el Teorema del valor medio del cálculo integral?

Ejercicio 7. a) Verificar que $\dfrac{x|x|}{2}$ es una primitiva de $|x|$.

b) Utilizando el inciso anterior, calcular $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x|\, dx$. Comparar con $\left|\displaystyle\int_{-4}^{4} x\, dx\right|$. ¿Qué concluye?

c) Verificar geométricamente la respuesta del inciso (b).

Ejercicio 8. Calcular

a) $\displaystyle\int_{\ln 3}^{\ln 6} 8e^x\, dx.$

b) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)\, dx.$

c) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{t^6 - t^2}{t^4}\, dt.$

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\operatorname{sen}(x)|\, dx.$

Ejercicio 9. Derivar las siguientes funciones:

a) $g(x) = \displaystyle\int_{1}^{x} (t^2 + 1)^8\, dt$

b) $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x^3} \operatorname{sen}^4(t)\, dt.$

c) $g(t) = \displaystyle\int_{5t+3}^{1} \frac{1}{1 + u^2 + \operatorname{sen}^2(u)}\, du$

d) $g(u) = \displaystyle\int_{\cos u}^{u^3} e^{x^2}\, dx$

Ejercicio 10. Sin calcular la integral, demostrar que $\displaystyle\int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt + \int_{0}^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\, dt$ no depende de x para $x > 0$.

Ejercicio 11. Sean

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 3 - x & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \int_{0}^{x} f(t)\, dt.$$

a) Determinar una expresión para $g(x)$.

b) Graficar las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

c) ¿Dónde son derivables estas funciones?

Ejercicio 12. Considerar la función $f(x) = x^2$.

a) Encontrar una suma inferior y otra superior de 2 términos que aproxime el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$.

b) Repetir el inciso anterior con sumas de 4 términos.

c) Demostrar que $f(x)$ es integrable en [0,b].

Sugerencia: hallar las sumas superiores e inferiores que corresponden a dividir el intervalo en n subintervalos de igual longitud y calcular la diferencia entre ambas. Deberán utilizar la fórmula $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{1}{6}N(N+1)(2N+1)$.

d) Hallar una primitiva de f y calcular, usando la Regla de Barrow, el valor exacto de $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$. Comprobar el resultado obtenido en el inciso anterior.

e) Comparar el valor exacto de la integral con los resultados obtenidos en los incisos *a*) y *b*).

Sugerencia: ver video de la teoría donde se trabaja $f(x) = x$.

Ejercicio 13. Dada $g(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2-4)^3\,dt$, calcular la recta tangente que pasa por $x = 2$.

Ejercicio 14. Demostrar que la función $F(x) = \displaystyle\int_0^x te^{-t}dt$ posee mínimo absoluto. ¿Qué valor mínimo alcanza la función?

Ejercicios adicionales

Ejercicio 15. Determinar, para todas las funciones del ejercicio 1, una expresión para la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, donde a es el extremo izquierdo del dominio de f. Indicar en cada caso el dominio obtenido. Si la función integral F resulta derivable, hallar su derivada. ¿Qué observa?

Ejercicio 16. Sea C una constante positiva. Hallar una función derivable $f(x) \neq 0$ que cumpla

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(x)^2 - C.$$