

**ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)**  
**(FHOM)**  
**TRABAJO PRÁCTICO 3**

1. Hacer una representación gráfica de las siguientes funciones lineales:

a)  $f(x) = \frac{3x}{2} - 2$

b)  $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$

2. Encontrar y graficar las funciones lineales que satisfacen las siguientes condiciones:

a)  $f(-1) = 0$  y  $f(1) = 2$ .

b) Su gráfica pasa por el origen y su pendiente es igual a 3.

c) Su gráfica pasa por el punto  $(2, 1)$  y es paralela a la recta de ecuación  $3x - 4y = 0$ .

d) Su gráfica es perpendicular a la recta de ecuación  $4x + 2y = 7$  y el punto  $(0, 0)$  pertenece a la gráfica.

3. Completando cuadrados, usando traslaciones, dilataciones, reflexiones graficar las siguientes funciones.

a)  $h(x) = -1/2 x^2 - 3x + 7/2$

c)  $f(x) = |2x^2 - 10x + 8|$

b)  $f(x) = 2x^2 - 10x + 8$

4. Determinar el o los valores de  $k$  tales que,

a)  $y = x^2 + 7x + k$  tiene una sola intersección con el eje  $x$ ,

b)  $y = x^2 - 2kx + k^2 - 3k + 2$  pasa por el origen.

5. A partir de la gráfica de  $f(x) = \frac{1}{x}$ , usando traslaciones apropiadas, graficar las siguientes funciones:

a)  $g(x) = \frac{1}{x-2}$

b)  $h(x) = \frac{1}{x+2}$

6. A partir de las siguientes funciones,

$$W(x) = \frac{x}{x+2} \quad \text{y} \quad Z(x) = \frac{-x+4}{x-2}$$

a) Verificar que:

1)  $W(x) = 1 - \frac{2}{x+2}$

2)  $Z(x) = -1 + \frac{2}{x-2}$

b) Hallar el dominio de  $W(x)$  y  $Z(x)$  y luego graficar usando traslaciones, dilataciones y/o reflexiones. Señalar en la gráfica asíntotas horizontales y verticales. (AYUDA: Utilizar el ejercicio 5).

c) Determinar en base a las gráficas realizadas en el inciso anterior para qué valores de  $x$  se satisfacen las siguientes condiciones:

1)  $W(x) = 0$

3)  $W(x) < 1$

2)  $Z(x) > 0$

4)  $Z(x) > -1$

7. Hallar el dominio y hacer un gráfico aproximado de  $f(x) = \frac{x+4}{-2x-4}$ . Indicar asíntotas horizontales y verticales, y ceros de la función, si corresponde.

8. Graficar las siguientes funciones e indicar el dominio e imagen de las mismas.

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x > 2 \\ -x-2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq -3 \\ -(x+3)^2+1 & \text{si } x > -3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

9. Reescribir las siguientes funciones como funciones a trozos utilizando la definición de valor absoluto y a continuación graficarlas.

a)  $g(x) = -|x-1| + x$

b)  $h(x) = |3x-5| + |2x+1|$

10. Utilizando adecuadamente las siguientes identidades

$$\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

$$\text{cos}(\alpha \pm \beta) = \text{cos}(\alpha) \cos(\beta) \mp \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)$$

a) Demostrar:

i)  $\text{cos}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}(\alpha)$

iii)  $\tan(\alpha) = \tan(\alpha + \pi)$  ¿Qué excepciones hay que tener en cuenta?

ii)  $\text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \text{cos}(\alpha)$

b) Utilizar el inciso anterior para determinar los siguientes valores:

i)  $\text{sen}\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

iii)  $\tan\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

v)  $\tan\left(\frac{17}{4}\pi\right)$

ii)  $\text{sen}\left(-\frac{5}{2}\pi\right)$

iv)  $\text{cos}\left(\frac{14}{3}\pi\right)$

vi)  $\text{cos}\left(-\frac{5}{6}\pi\right)$

c) En el inciso anterior los argumentos de las funciones trigonométricas están dados en *radianes*. Sabiendo que  $\pi$  radianes equivale a 180 grados, escribir los argumentos en grados.

11. Encontrar, si es que existen, los valores de  $x$  donde las funciones  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$  y  $\text{tan } x$ :

- i) se anulan
- ii) alcanzan el máximo absoluto
- iii) alcanzan el mínimo absoluto

Pista: Usar la periodicidad de las funciones.

12. Determinar, si existen, los valores de  $x$  tales que:

a)  $\text{sen}(x + 5) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\text{tan}(x - 1) = 1$

b)  $\text{cos}(x - 4) = \frac{1}{2}$

d)  $\text{tan}\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

13. Trazar las gráficas de las siguientes funciones, y en cada ítem, realizarlas en un mismo plano de ejes coordenados. Sugerimos utilizar las transformaciones estudiadas, tales como reflexiones, traslaciones y dilataciones.

a)  $\text{sen}(x)$  ,  $\text{sen}(2x)$  y  $\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

b)  $\text{cos}(x)$  ,  $\text{cos}\left(\frac{1}{2}x\right)$  y  $-\frac{3}{2}\text{cos}(x + \pi)$

c)  $\text{tan}(x)$  ,  $-\text{tan}(x)$  y  $\text{tan}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

14. Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = |\text{sen}(x)|$

b)  $g(x) = |\text{cos}(x)|$

c)  $h(x) = |\text{tan}(x)|$

15. a) Graficar una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que cumpla simultáneamente las siguientes condiciones:

1)  $f(x) < 0$  si  $x \in (-\infty, -1) \cup (4, 6)$

2)  $f(x) > 0$  si  $x \in (-1, 4) \cup (6, \infty)$

3)  $f(x) = 0$  si  $x = -1$ ,  $x = 4$  y  $x = 6$ .

b) Indicar, de acuerdo al gráfico realizado, las regiones de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos relativos y/o absolutos (si los tiene), intervalos de convexidad.

c) A partir del gráfico de  $f$  realizado en el inciso anterior, graficar  $|f(x)|$ .

## Problemas de aplicación

1. Una flecha se lanza con un ángulo de 45 grados hacia arriba en dirección al horizonte y viaja trazando un arco parabólico dado por la ecuación  $y = ax^2 + x + c$ . Utilizar el hecho de que la flecha se lanza a una altura vertical de  $1,5\text{ m}$  y que vuelve a alcanzar la misma altura luego de recorrer una distancia horizontal de  $60\text{ m}$ , para hallar  $a$  y  $c$ . ¿Cuál es la máxima altura alcanzada por la flecha? ¿En qué intervalo sube la flecha? ¿En qué intervalo baja? ¿A qué distancia la flecha toco el piso?
2. Encontrar las coordenadas de un punto cuya distancia al  $(0, 0)$  y  $(4, 4)$  sea  $2\sqrt{2}$ .
3. Se sabe que cierto gallinero rectangular tiene un perímetro de  $30\text{ m}$ . Expresar la superficie del gallinero en función de su ancho. Si se sabe que el ancho es de  $6\text{ m}$  averiguar la superficie del gallinero. ¿Cuál es el ancho si se sabe que la superficie es de  $44\text{ m}^2$ ? ¿Puede ser el ancho de  $18\text{ m}$ ? Hallar el rango de posibles anchos del gallinero, es decir, el dominio de la función que determina la superficie de acuerdo a su ancho.
4. Con un cuadrado de cartón de  $1\text{ metro}$  de lado se desea construir una caja de base cuadrada (sin tapa) cortando cuadrados de las esquinas y doblando los lados hacia arriba. Expresar el volumen de la caja en función de la altura. Indicar el dominio de la función.

### *Ejercicios adicionales:*

1. Demostrar que la función potencia  $f(x) = x^3$  es estrictamente creciente en todos los reales.
2. Probar que la función  $f(x) = 1/x$  es estrictamente convexa en  $(0, \infty)$ .
3. Los gastos mensuales, en pesos, de una empresa por la fabricación de  $x$  relojes vienen dados por la función  $G(x) = 2000 + 25x$ , y los ingresos que se obtienen por las ventas son  $I(x) = 60x - \frac{1}{100}x^2$ , también en pesos. ¿Cuántos relojes deben fabricarse para que el beneficio (ingresos-gastos) sea máximo?
4. Un colectivo parte desde la terminal de un pueblo hacia otro a las  $17\text{ hs.}$  a una velocidad constante de  $96\text{ km/h}$ , por una carretera recta. Un pasajero que no llegó a horario a tomar el colectivo decide alcanzarlo en un remise. A las  $17:20\text{ hs}$  comienza el viaje en remise a una velocidad constante de  $120\text{ km/h}$ .
  - Consideren las funciones de posición del colectivo y el remise, teniendo en cuenta que ambas miden la distancia que separa a cada vehículo de la terminal del pueblo de partida. Si  $t$  se mide en horas,  $t = 0$  representa las  $17\text{hs}$  y las funciones de posición se consideran medidas en  $\text{km}$ , encuentren las expresiones de cada una de ellas y realicen las gráficas.
  - ¿A qué hora el pasajero alcanza al colectivo?
  - ¿A qué distancia del pueblo de partida se produce el encuentro?