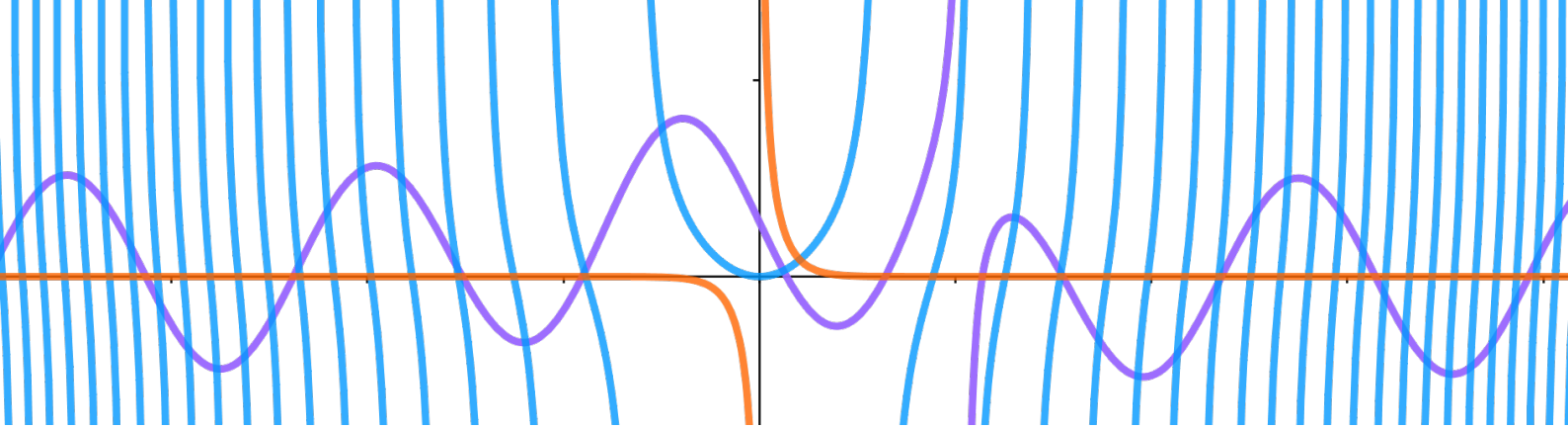


Índice general

1 Ecuaciones de la recta 3

1.1 Introducción histórica 3

1.1.1 Coordenadas cartesianas 4

1.2 Ecuaciones de la recta 5

1.2.1 Recta que pasa por el origen 5

1.2.2 Recta que no pasa por el origen 5

1.2.3 Distintas ecuaciones de la recta 6

1.2.4 Rectas paralelas a los ejes coordenados 7

2 Cónicas 11

2.1 Ecuación general de las cónicas 11

2.2 Secciones cónicas 14

2.2.1 Circunferencia 14

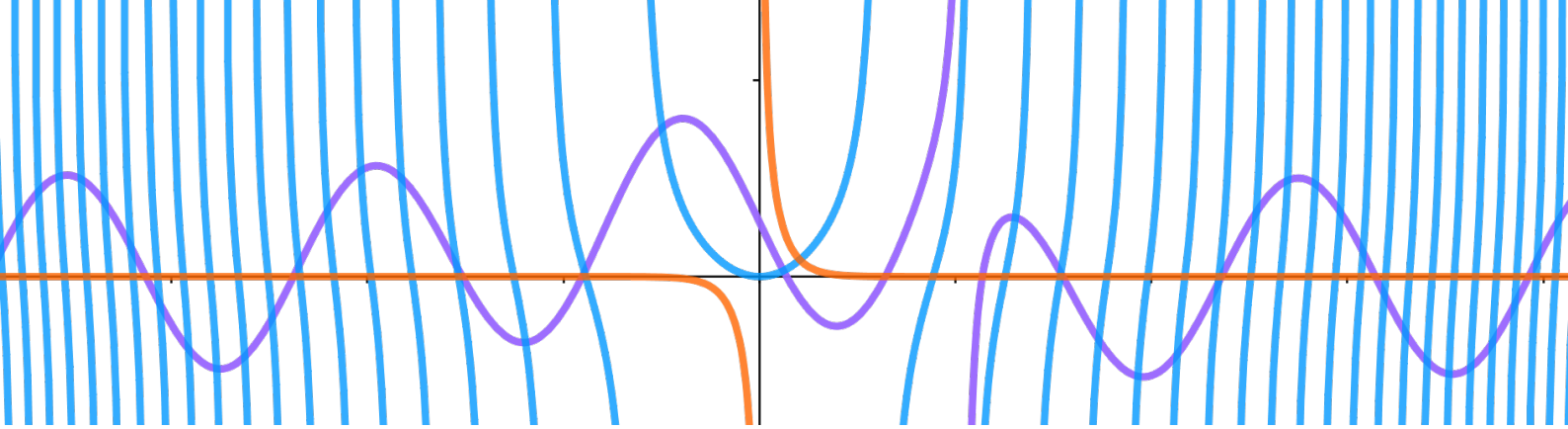
2.2.2 Parábola 17

2.2.3 Elipse 23

2.2.4 Hipérbola 28

Bibliografía 35

Libros 35



1. Ecuaciones de la recta

1.1 Introducción histórica

La geometría es una de las ciencias más antiguas. En el antiguo Egipto estaba muy desarrollada y en Grecia, Euclides configuró la geometría en forma axiomática naciendo así la llamada *Geometría Euclideana*.

Los postulados de Euclides, presentados en su tratado denominado "Los Elementos", permiten exponer los conocimientos geométricos de la Grecia Clásica que se deducen a partir de éstos. Los postulados de "Los Elementos" son cinco:

1. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.
2. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una recta.
3. Dados un punto y un radio cualesquiera, se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

El quinto postulado fue cuestionado y discutido durante largo tiempo ya que muchos creían que no era independiente de los otros cuatro.

El desarrollo de la geometría continúa con la geometría cartesiana en el siglo XVII, con la geometría diferencial de Gauss y más tarde con la Geometría Algebraica.

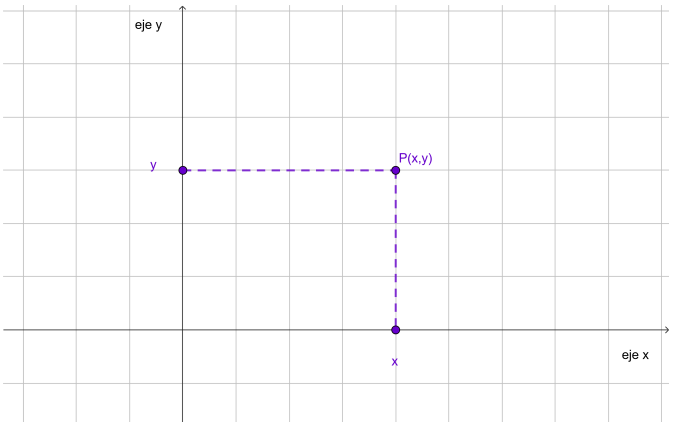
La geometría analítica estudia las figuras geométricas con técnicas básicas del Análisis Matemático y del Álgebra, en un determinado sistema de coordenadas. Las coordenadas son el esqueleto de la geometría analítica, las intermediarias entre los números, las magnitudes y el movimiento.

La palabra **coordenada** no proviene de Descartes ni de Fermat, sino que fue empleada por primera vez por Leibniz. El descubrimiento casi simultáneo de la geometría análitica se debe a Descartes y a Fermat, quienes estaban interesados en la creación de un principio uniforme en la geometría. Ellos establecieron los fundamentos del método y así los famosos problemas de la antigüedad fueron resueltos por Descartes. Además, éste supuso implícitamente que entre los puntos de un plano y el conjunto de todos los pares de números reales puede ser establecida una correspondencia perfecta.

Esta disciplina abrió los canales para los descubrimientos del cálculo infinitesimal, la teoría de funciones, la mecánica y la física-matemática.

1.1.1 Coordenadas cartesianas

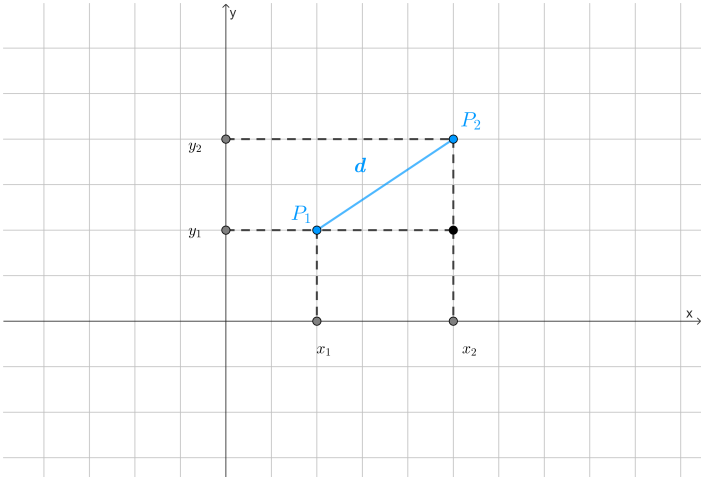
Consideremos dos rectas X e Y que se cortan perpendicularmente, cuyo punto intersección lo llamamos origen de coordenadas O. De esta manera queda definido el plano cartesiano o coordenado, dividido cuatro cuadrantes, enumerados en sentido antihorario, es decir, en el sentido contrario a las agujas del reloj:



Si tomamos un punto P del plano, la distancia del mismo al eje y se denomina abscisa y se denota **x**; la distancia del punto al eje x se llama ordenada y se denota **y**. El punto P, cuya abscisa es **x** y ordenada **y**, se denota $P(\mathbf{x},\mathbf{y})$. A cada punto del plano le corresponde un par ordenado de números reales y a cada par ordenado de números reales le corresponde un punto del plano.

Cuando se conocen dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ la distancia entre ellos se calcula, usando el *Teorema de Pitágoras* de la siguiente forma:

$$d(P_1,P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



Observación: Una demostración geométrica del *Teorema de Pitágoras* puede verse en `www.mate.unlp.edu.ar/extension/geometriaygeogebra/pitagoras.ggb`

Lugar Géometrico

Un concepto fundamental para estudiar curvas en la geometría analítica es el de lugar geométrico, que se define como el conjunto de puntos que satisfacen una condición o condiciones dadas. La condición que se impone a los puntos del lugar geométrico se puede expresar analíticamente como una ecuación o varias ecuaciones que deben satisfacer las coordenadas de los dichos puntos.

Observación: *Principio fundamental de la geometría analítica*

Si las coordenadas de un punto satisfacen una o varias ecuaciones, el punto está en el lugar geométrico que definen dichas ecuaciones. Recíprocamente, si un punto está en el lugar geométrico que define una o varias ecuaciones, las coordenadas del mismo las satisfacen.

1.2 Ecuaciones de la recta

Supongamos que se tienen la siguiente situación: una compañía de taxis cobra $2000 por los primeros 0,6 km de viaje y $ 150 por cada 0,2 km adicionales. ¿Cómo podría graficar estos datos en un plano coordenado cuyos ejes midan el costo y la distancia de un viaje cualquiera? ¿Puede encontrar alguna ecuación que modelice esta situación? ¿Cuánto nos costaría realizar un viaje de 16 km contratando a esta empresa? En este ejemplo, la relación entre el costo del viaje y la distancia recorrida se llama lineal y su gráfico es un recta. Para poder responder a las preguntas anteriores, dedicaremos la siguiente sección a repasar las distintas ecuaciones de una recta.

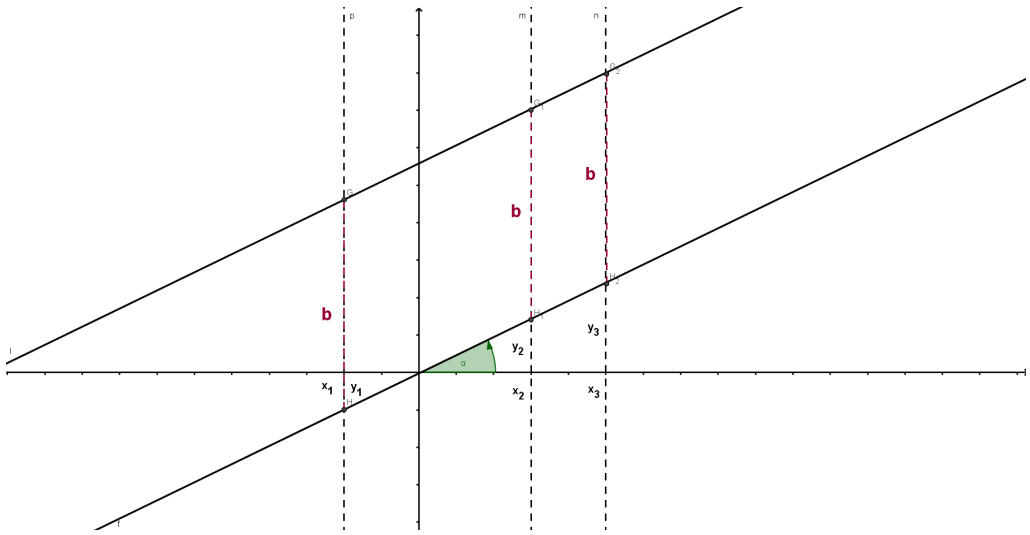
1.2.1 Recta que pasa por el origen

Consideramos un conjunto de puntos que cumple con la condición de que sus ordenadas y_1, y_2, y_3,..., forman con sus abscisas (no nulas) $x_1, x_2, x_3, ...$, una serie de triángulos semejantes, por lo que sus catetos son proporcionales. Llamemos m al coeficiente de proporcionalidad, entonces tenemos

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3} = ... = \frac{y}{x} = m$$

de esta expresión se desprende, en general, que $y = mx$ para todos los puntos que cumplan las condiciones anteriores y esta igualdad representa la ecuación de una recta que pasa por el origen y tiene pendiente m. Recíprocaamente, dada la ecuación $y = mx$ el conjunto de puntos que la satisfacen se representa por una recta que pasa por el origen y tiene pendiente m.

Observemos que la pendiente de la recta es la tangente de su ángulo de inclinación. Usualmente se denota $m = \tan\alpha$ y donde α es el ángulo de inclinación de la recta, es decir el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de las X, medido en sentido antihorario.



1.2.2 Recta que no pasa por el origen

En este caso, la recta que estamos considerando es necesariamente paralela a otra que pasa por el origen y que tiene la misma inclinación, por lo tanto igual pendiente. Sus ordenadas difieren

en una constante que denominamos b. Cada ordenada de los puntos de la recta dada se obtiene sumándole b a la ordenada correspondiente al punto que se encuentra en la recta que pasa por el origen (ver la figura anterior).

La ecuación de esta recta es $y = mx + b$. La constante b se denomina ordenada al origen pues el punto $(0, b)$ pertenece a la recta.

Ejercicios 1.1

1. Determinar analíticamente si la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(1/2,0)$ pasa también por el origen. Visualizar graficando en GeoGebra .
2. *a*) A través de la barra de entrada de GeoGebra , asignar los puntos: $A(-3,0)$, $B(-1,3)$, $C(4,3)$ y $D(4,-1)$.
   b) Trazar rectas que pasen por dichos puntos.
   c) Observar la vista algebraica de las rectas trazadas y responder
   - ¿Cómo nombra GeoGebra a las rectas?
   - ¿Cuál es la pendiente y la ordenada al origen de cada recta?

   d) Analizar las rectas graficadas y relacionar:
   - ¿Alguna de las rectas graficadas tiene pendiente menor que 0? Si es así, ¿qué podemos decir de la recta?
   - ¿Alguna de las rectas graficadas tiene pendiente mayor que 0? Si es así, ¿qué podemos decir de la recta?

■

1.2.3 Distintas ecuaciones de la recta

La ecuación de la recta deducida anteriormente, de la forma $y = mx + b$ se llama **ecuación explícita**. Veamos en este caso cuál es la forma de m. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos tales que $x_1 \neq x_2$, que satisfacen la ecuación $y = mx + b$, entonces $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$. Luego,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

es la expresión para la pendiente de la recta.

Dado un punto de coordenadas $P(x, y)$ cualquiera de la recta distinto de los puntos P_1 y P_2 y usando semejanza de triángulos tenemos la **ecuación simétrica** de la recta

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

si $x_1 \neq x_2$. Los casos en que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$ los trataremos más adelante.

También podemos escribir la **ecuación implícita** de la forma

$$Ax + By + C = 0,$$

donde A y B no son simultáneamente nulos.

Ejemplo: Busquemos una ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(1,3)$ y $P_2(2,5)$.

Comencemos por la ecuación explícita. Para esto primero calculamos la pendiente de la recta $m = \frac{5-3}{2-1} = 2$, de donde $y = 2x + b$. Para hallar b reemplazamos las coordenadas de cualquiera de los dos puntos datos en la ecuación anterior. Si usamos P_1, tenemos que $3 = 2 \cdot 1 + b$, de donde $b = 3 - 2 = 1$. Luego la ecuación explícita será $y = 2x + 1$. Notemos que en el cálculo de la pendiente es indistinto al nombre de los puntos P_1 y P_2.

Por otro lado, la ecuación implícita para esta recta se obtiene igualando a 0 la expresión anterior, esto es, $2x - y + 1 = 0$.

Ejemplo: Dada la ecuación lineal $6x-2y=3$, buscamos la pendiente y la ordenada al origen de dicha recta. Para esto, despejamos la variable y de la ecuación anterior, de donde $y=3x-\frac{3}{2}$. Luego, $m=3$ y $b=-\frac{3}{2}$.

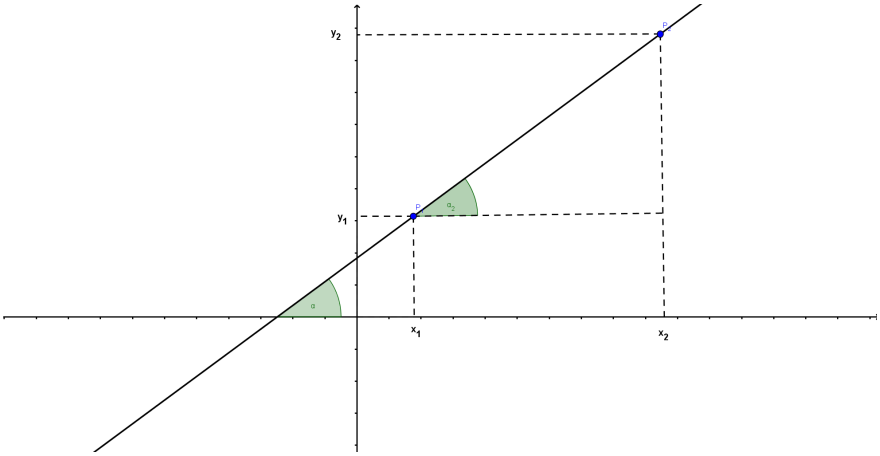
Ejercicios 1.2 Utilizando la ecuación simétrica de la recta, hallar una ecuación de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2:

1. $P_1(-2,4)$ y $P_2(-4,5)$.
2. $P_1(2,4)$ y $P_2(-2,2)$.
3. $P_1(-1,-3)$ y $P_2(1/2,5)$.
4. $P_1(3,2)$ y $P_2(2,3)$.

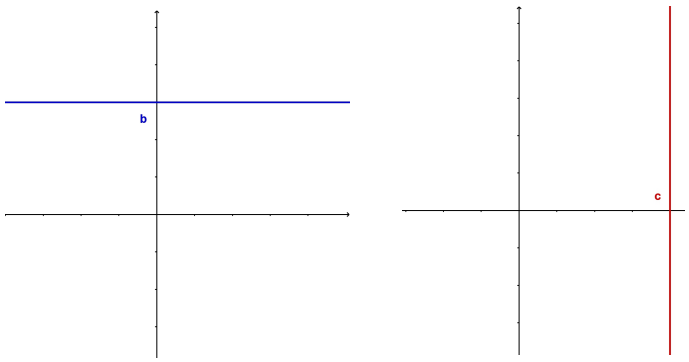
Graficar en GeoGebra y verificar los resultados. ■

1.2.4 Rectas paralelas a los ejes coordenados

Dada una recta con pendiente $m=\tan\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación de la recta, analicemos gráficamente la relación entre α y m.



- Si α es agudo, entonces $m>0$.
- Si α es obtuso, entonces $m<0$.
- Si $\alpha=0°$, entonces $m=0$ y la recta dada es paralela al eje x. Su ecuación será $y=constante$.
- Si $\alpha=90°$, entonces m no está determinado y la recta dada es paralela al eje y. Su ecuación será $x=constante$.



Rectas paralelas a los ejes coordenados

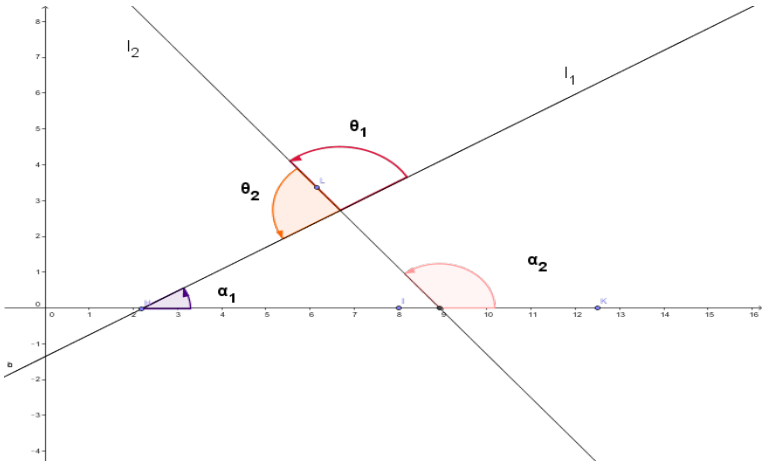
Observación: Dados dos puntos P_1 y P_2 que pertenecen a una recta paralela al eje x, qué relación cumplen sus ordenadas? ¿Y si los puntos pertenecen a una recta paralela al eje y, qué relación cumplen sus abscisas?

Ejercicios 1.3

1. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos:
   (a) $(-3,2)$ y $(7,-3)$ (b) $(-3,2)$ y $(-3,0)$,
   graficando en GeoGebra y usando el comando *ángulo*.
2. Usando GeoGebra construir una recta de $37°$ de inclinación y ordenada al origen $-\frac{3}{2}$.

■

Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Supongamos que se cortan en un punto P. Este punto es el vértice de cuatro ángulos determinados por las rectas (o semirrectas). Sean θ_1 y θ_2 dos ángulos no opuestos por el vértice y sean α_1, α_2 los ángulos de inclinación de L_1 y L_2, respectivamente.



Veamos la relación entre sus tangentes.

$$\theta_1 = 180° - \alpha_1 - (180° - \alpha_2). \tag{1.1}$$

entonces $\theta_1 = \alpha_2 - \alpha_1$ con lo cual, utilizando la identidad para la tangente de una diferencia de ángulos tenemos

$$\tan\theta_1 = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_2.\tan\alpha_1} = \frac{m_2 - m_1}{1+m_2.m_1}$$

Por otro lado, $\theta_1 + \theta_2 = 180°$ Reemplazando en (1.1) esta expresión llegamos a $\theta_2 = \alpha_1 + (180° - \alpha_2)$, de donde

$$\tan\theta_2 = \frac{\tan\alpha_1 + \tan(180° - \alpha_2)}{1 - \tan\alpha_1\tan(180° - \alpha_2)} = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}$$

En definitiva, tenemos que $\tan\theta_2 = \dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$ y que $\tan\theta_2 = -\tan\theta_1$.

Con lo cual podemos enunciar las siguientes conclusiones:

- Si θ es el ángulo determinado por dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 entonces está dado por $\tan\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ si $m_1m_2 + 1 \neq 0$.
- Si las rectas se cortan formando un ángulo de $90°$, decimos que las rectas son perpendiculares y $m_1.m_2 = -1$. Lo anotamos $\ell_1 \perp \ell_2$.

- Si el ángulo entre las rectas es 0° entonces las rectas son paralelas. En este caso, se tiene que $m_1 = m_2$. Lo anotamos $\ell_1 // \ell_2$.

Ejercicios 1.4

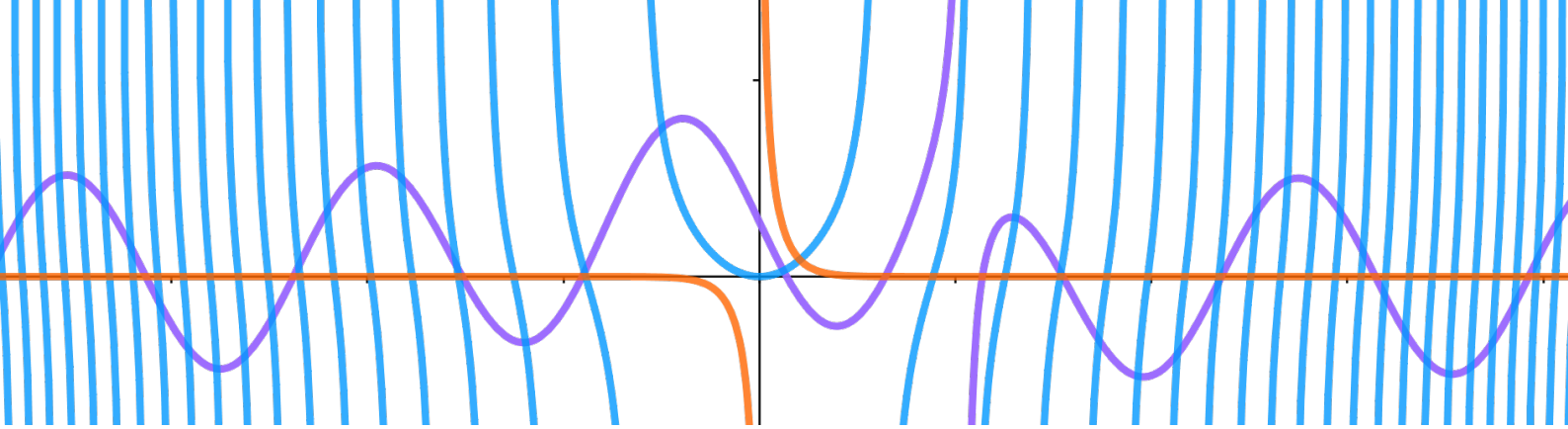
1. Utilizando GeoGebra representar las siguientes rectas
   - $y+3=3x$
   - $y=3x+4$
   - $y=3(x+2)$
   - $2y=6x+8$
   - $9y=-3x+18$
2. De las rectas graficadas, buscar cuáles son paralelas entre sí.
3. ¿Cuáles serían perpendiculares a $y=3x+2$?
4. Explorar en GeoGebra el comando *Recta paralela*, para las rectas dadas anteriormente.
5. Idem para el comando *Recta perpendicular*.

■

Ejercicios 1.5

1. Crear en GeoGebra tres puntos no alineados cualesquiera.
2. Trazar una recta que pase por dos de esos tres puntos. Notar que dicha recta es llamada por GeoGebra con la letra a.
3. Utilizando la barra de herramientas, trazar una recta paralela a la recta creada que pase por el tercer punto.Notar que dicha recta es llamada por GeoGebra con la letra b.
4. Observar la vista algebraica y responder
   - En la recta a, cuál es la pendiente y la ordenada al origen?
   - En la recta b, cuál es la pendiente y la ordenada al origen?
   - Mediante la opción *Elige y Mueve*, explorar qué sucede con las ecuaciones de las rectas al mover los puntos.
   - De la misma forma, explorar qué sucede con las ecuaciones al mover las rectas.
   - ¿Qué condición deben cumplir ambas rectas para que sean paralelas?

■



2. Cónicas

2.1 Ecuación general de las cónicas

En la sección anterior vimos que una ecuación de primer grado en dos variables de la forma $Ax+By+C=0$, con A y B no simultáneamente nulos, siempre representa una recta y, recíprocamente, toda recta se puede representar por una ecuación de primer grado en dos variables.

La ecuación general de segundo grado en dos variables tiene la forma

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{2.1}$$

en la cual A, B, C son números reales que no son nulos a la vez. Las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan, salvo excepciones triviales, a secciones cónicas; esto es, curvas formadas por la intersección de un plano con un cono circular recto.

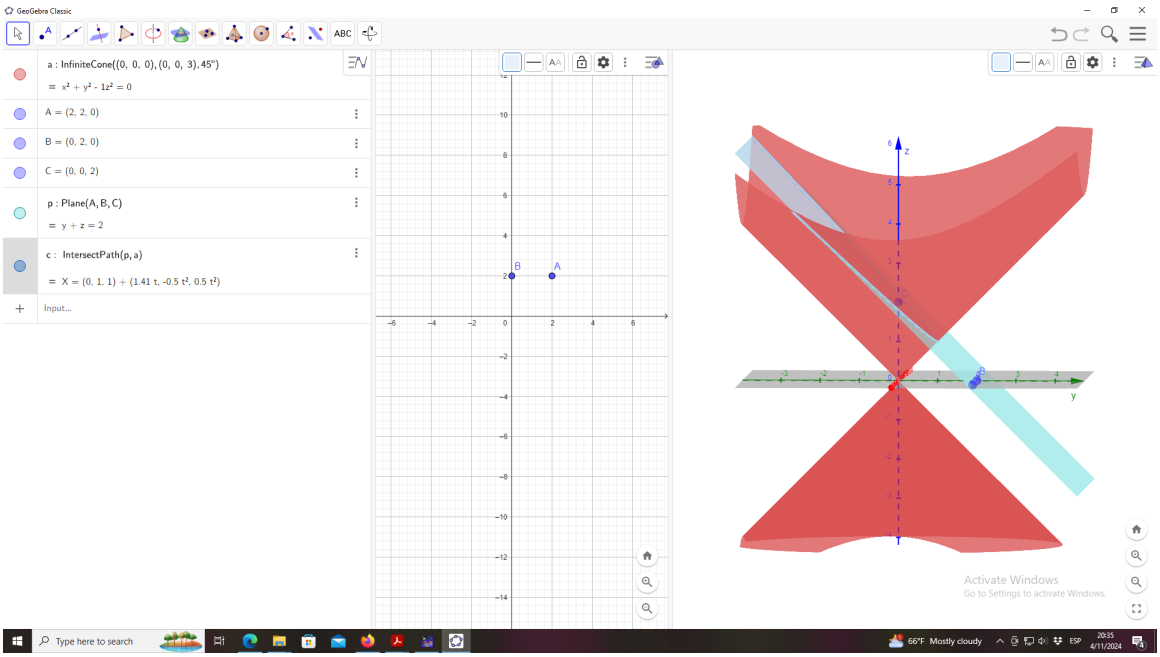
Una superficie cónica o cono es aquella que está generada por una recta que se mueve sobre una curva plana fija de manera tal que siempre pasa por un punto fijo que no pertenece al plano donde está contenida la curva. La recta móvil se llama generatriz, la curva fija se llama directriz y el punto fijo se llama vértice. Cuando la directriz es una circunferencia, el cono se dice circular recto.

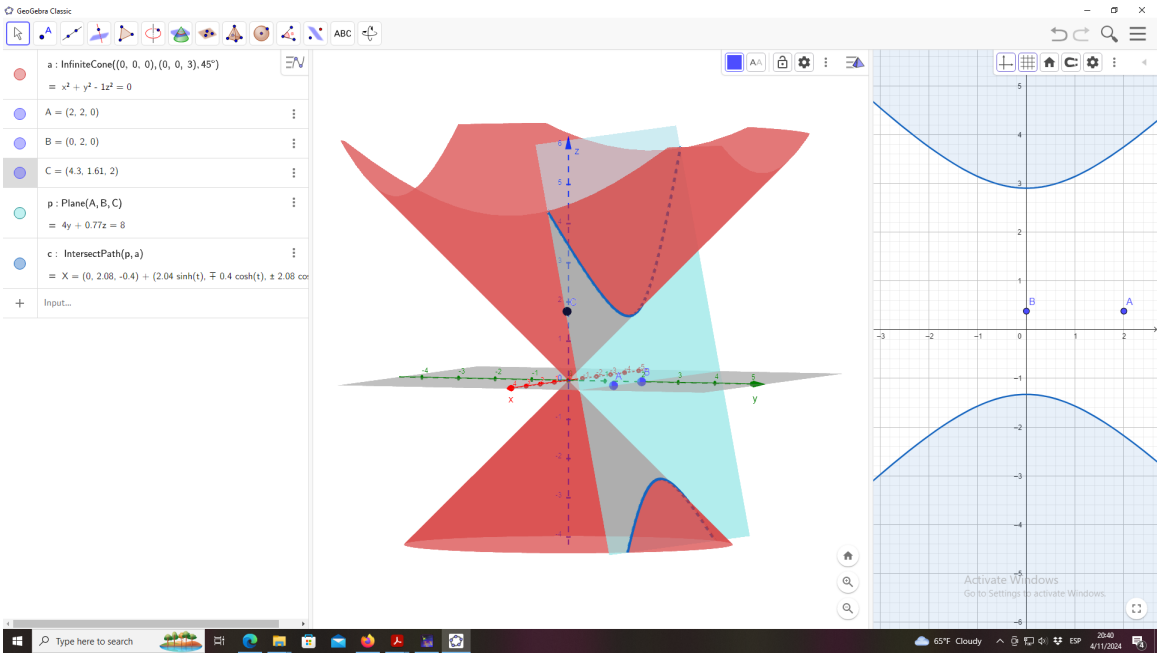
Las llamadas secciones cónicas, o simplemente **cónicas**, son ciertas curvas particulares cuyas propiedades son conocidas desde la antigüedad clásica. Su nombre se debe a que estas curvas pueden obtenerse al realizar la intersección de un cono circular con un plano en distintas posiciones. Ellas son la parábola, la circunferencia, la elipse y la hipérbola. Para visualizarlas construiremos un cono, un plano y haremos su intersección, utilizando herramientas de GeoGebra , siguiendo estos pasos:

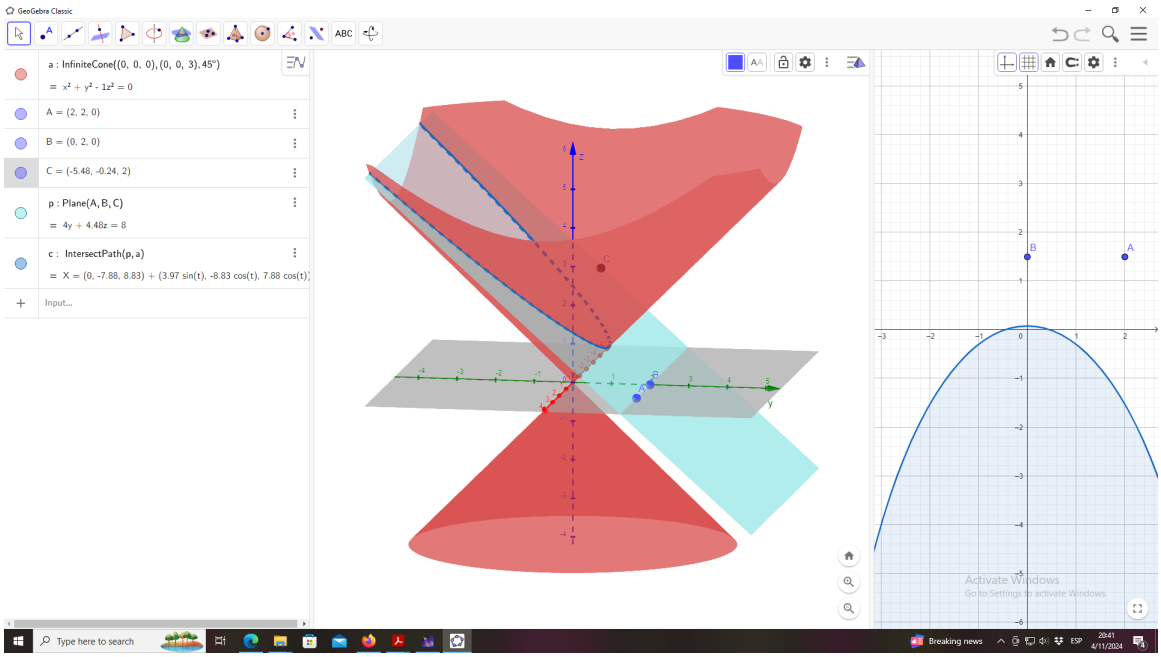
1. En el menú vista active la Vista Gráfica 3D.
2. Use la barra de comandos para dar entrada, de cada uno de los comandos:
   - a=ConoInfinito[(0, 0, 0), (0, 0, 3), 45º]
   - A= (2,2,0)
   - B=(0,-2,0)
   - C=(0,0,2)
   - b=Plano[A,B,C]

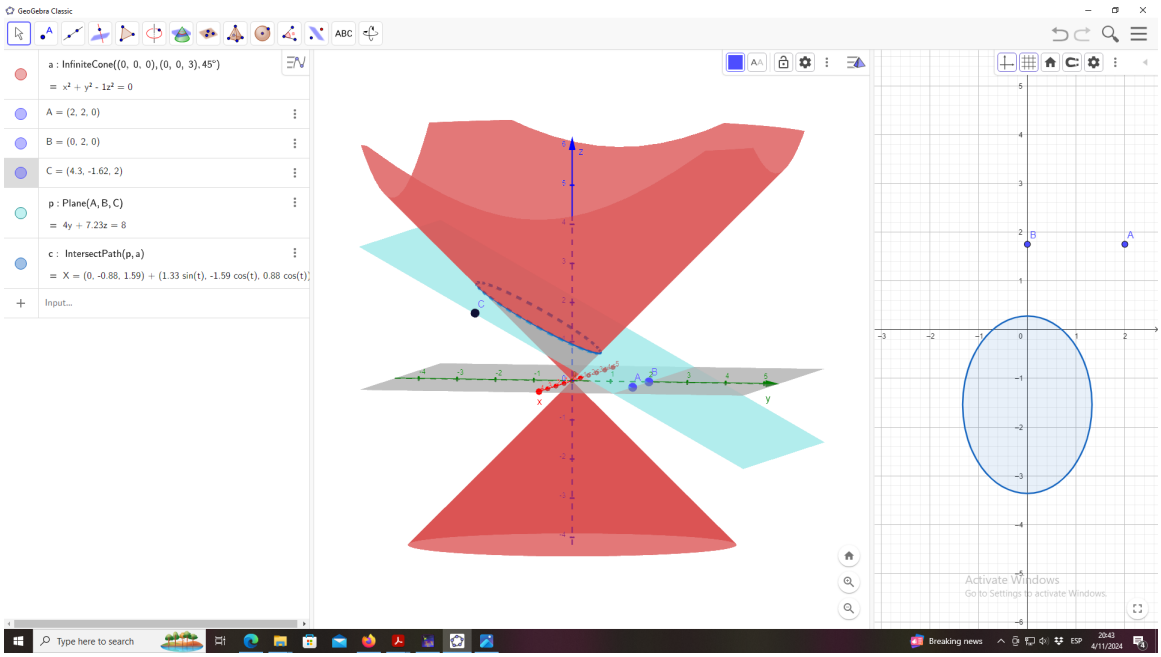
- Mueva los puntos A, B y C en la Vista Gráfica 3D y observe la intersección del cono con el plano.

3. Determine la intersección del cono con el plano, usando la herramienta *Intersección de dos superficies* o escribiendo c=Interseca[a,b] o IntersecaRecorridos[a, b].
4. Active la representación 2d de la cónica c.
5. Mueva los puntos A, B y C en la Vista Gráfica 3D y observe las distintas cónicas en la vista 2D de la curva c.









Las cónicas degeneradas son aquellas que se obtienen cuando el plano pasa por el vértice del cono. Estas intersecciones pueden ser un punto, una recta o un par de rectas, que ya hemos estudiados.

Puede demostrarse que por medio de una rotación de los ejes coordenados, la ecuación (2.1) puede transformarse en una ecuación de la forma

$$A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0, \tag{2.2}$$

en la cual alguno de los coeficientes A' y C' es no nulo y no aparece el término en xy llamado término rectangular.

Observaciones:

- Si alguno de los coeficientes A' y C' es igual a cero, la ecuación (2.2) representa una **parábola**.
- Si los coeficientes A' y C' tiene el mismo signo pero son distintos, la ecuación (2.2) representa una **elipse** o un punto o ningún lugar geométrico real.
- Si los coeficientes A' y C' son iguales, la ecuación (2.2) representa una **circunferencia** o un punto o ningún lugar geométrico real.
- Si los coeficientes A' y C' tienen signo distinto, la ecuación (2.2) representa una **hipérbola** o un par de rectas que se cortan.

2.2 Secciones cónicas

2.2.1 Circunferencia

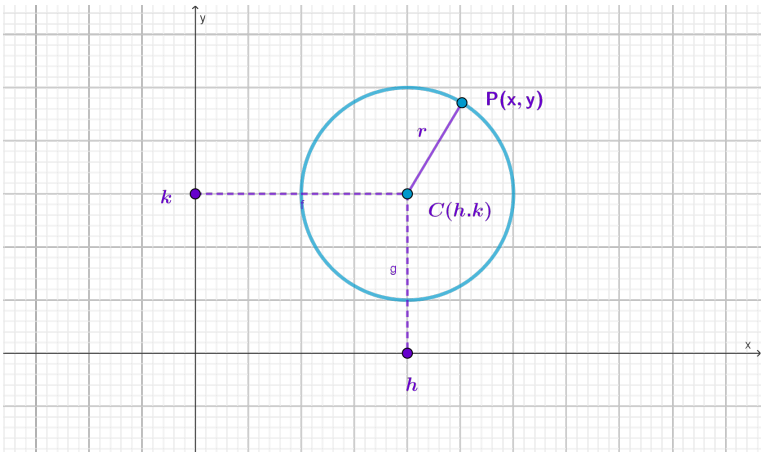
Una circunferencia es el lugar geométrico formado por los puntos $P(x,y)$, del plano coordenado cuya distancia a un punto fijo $C(h,k)$, llamado **centro**, es una constante positiva r, llamada **radio** de la circunferencia.

Distintas ecuaciones de la circunferencia

La ecuación analítica que representa a la circunferencia puede obtenerse, de acuerdo con la definición anterior, usando la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Esta es la llamada *forma canónica* de la ecuación de la circunferencia y permite identificar con rapidez y facilidad las coordenadas del centro $C(h,k)$ y la longitud de su radio r, elementos suficientes para dibujar su gráfica.

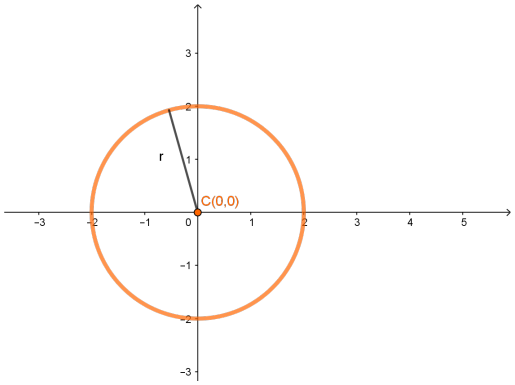


Recíprocamente, si se conocen las coordenadas del centro y la longitud del radio, la ecuación de la circunferencia en forma canónica podrá escribirse inmediatamente.

Se puede observar que:

- Esta ecuación se satisface únicamente para puntos del plano cuya distancia al centro $C(h,k)$ es r.
- Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas $(0,0)$, la ecuación resulta

$$x^2+y^2=r^2$$



- Trabajando algebraicamente la ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

y denotando $D=-2h$, $E=-2k$, $F=h^2+k^2-r^2$ se obtiene la ecuación

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

Esta última recibe el nombre de *forma general* de la ecuación de una circunferencia.

- Cuando se conoce la forma general de una circunferencia, esta puede reducirse a su forma canónica por medio del método de completación de cuadrados en los términos en x y en los términos en y.

Ejercicios 2.1

1. Sea $P(x,y)$ un punto que se mueve de manera tal que su distancia al punto $(-3,2)$ es siempre 4.
   - Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico dado anteriormente.
   - Graficar en GeoGebra y verificar la solución hallada.
   - Encontrar todos los elementos de la cónica anterior.
2. En cada inciso, conocidas las coordenadas del centro de una circunferencia y la longitud de su radio, obtener sus ecuaciones en forma canónica, general y hacer una gráfica usando GeoGebra .
   - $C(-2,3)$, $r=3$
   - $C(-1,3)$, $r=2$
   - $C(1,-2)$, $r=0$
   - $C(0,0)$, $r=1$
3. En cada inciso se da la forma general de la ecuación de una circunferencia. Obtener el centro, el radio y graficarla usando GeoGebra .
   - $x^2+y^2-2x+6y-6=0$
   - $2x^2+2y^2-2x-2y-4=0$
   - $x^2+y^2-6x-8y+25=0$
   - $x^2+y^2-16=0$
   - $x^2-x+y^2+6=0$
4. Encontrar con GeoGebra la ecuación de la circunferencia de centro $C(-3,-5)$ y radio 7.
5. Encontrar con GeoGebra la ecuación de la circunferencia de centro $C(7,-6)$ y que pasa por el punto $A(2,2)$.
6. Decidir utilizando GeoGebra si los siguientes puntos son interiores o exteriores a la circunferencia $y^2+x^2=2$:

- $P_1(0,0)$.
- $P_2(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{3})$.
- $P_3(\frac{3}{4},1)$.
- $P_4(2,1)$.

7. Hallar utilizando el comando *Intersección* de dos objetos la intersección entre las circunferencias $(x-1)^2+y^2=3^2$ y $(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$.
8. Hallar mediante GeoGebra la distancia al origen de las siguientes circunferencias:
   - $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.
   - $(x-1)^2+y^2=1$.
   - La circunferencia de centro $C(\frac{1}{2},1)$ y radio $\frac{1}{4}$.

Circunferencia determinada por tres condiciones dadas

En la forma ordinaria o canónica de la ecuación de una circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

aparecen tres parámetros h, k y r que en cada caso pueden tener valores diferentes. De la misma manera, la forma general de la ecuación de una circunferencia

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

también se escribe usando tres parámetros D, E y F. En ambos casos estos parámetros quedan determinadados a partir de tres condiciones dadas e "independientes".

Esto es, conociendo tres puntos que pertenezcan a la circunferencia se determina un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas. La única solución de este sistema es el conjunto de los tres parámetros que definen la ecuación de la circunferencia considerada.

Ejercicios 2.2

1. Utilizando el comando *Circunferencia*, halle la circunferencia que pasa por los puntos $(0,0)$, $(1,2)$ y $(2,3)$.
2. Graficar y determinar analíticamente la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos
   - $(1,1)$, $(0,2)$ y $(2,-2)$
   - $(0,0)$, $(3,0)$ y $(1,1)$

Intersecciones entre una circunferencia y una recta

Dadas una circunferencia y una recta en el plano cartesiano pueden presentarse tres posibles casos detallados a continuación.

- No existen puntos de intersección, es decir la recta es exterior a la circunferencia.
- Existe un punto de intersección. En este caso se dice que la recta es tangente a la circunferencia.
- Existen dos puntos de intersección. En este caso se dice que la recta y la circunferencia son secantes.

Estas tres posibilidades se corresponden con las distintas soluciones que puede tener el sistema de ecuaciones formado por la ecuación lineal que representa la recta y la ecuación cuadrática (en sus dos variables) que representa la circunferencia.

Este tipo de sistema de ecuaciones es llamado mixto y puede no tener solución real, tener una única solución real o tener dos soluciones reales distintas.

Ejercicios 2.3

1. Encontrar con GeoGebra la intersección entre la circunferencia y la recta dadas.
   - $x^2+y^2=3$, $y=10-x$.
   - $(x-2)^2+(y+5)^2=9$, $x+y=1$.
   - $2x^2+5x-3y+2y^2=-1$, $y=x$.

   Verificar analíticamente la solución obtenida.
2. Encontrar el valor de la pendiente a de las rectas que pasan por el punto $(0,5)$ y son tangentes a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=3^2$. Graficar en GeoGebra .

Ejercicios 2.4

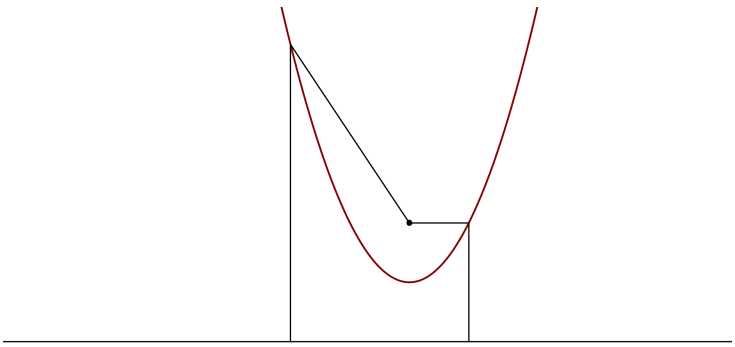
1. Utilizando GeoGebra , construir dos circunferencias: una de centro (0, 0) y de radio 2, y la otra de centro (2, 0) y de radio 1.
   - Hallar el punto de intersección entre ambas utilizando el comando *Intersección de dos objetos*.
   - ¿Cuál es la distancia de este punto al centro de cada una de estas circunferencias? ¿Por qué?
2. Hallar utilizando GeoGebra la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(1,4)$ y es concéntrica a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+6x-4y-1=0$.
3. Hallar utilizando GeoGebra las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ que pasen por el punto exterior $P(4,2)$. ¿Qué sucede con los puntos de tangencia a medida que se aleja el punto P sobre la semirrecta que contiene a P y al centro de la circunferencia?
4. Hallar con GeoGebra la ecuación de la circunferencia que tiene por centro a $C(3,-1)$ y es tangente al eje de ordenadas.

2.2.2 Parábola

Introducción

La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta fija llamada *directriz* y de un punto fijo, llamado *foco*, que no se encuentra en dicha recta.

En la siguiente figura se colocan a modo de ejemplo dos puntos situados sobre la parábola y se ve que satisfacen la definición. Las definiciones de las cónicas son muy anteriores al concepto del plano coordenado, es decir, a los ejes cartesianos. Esto significa que la ubicación relativa de la misma no necesita ser horizontal ni vertical, ya que en la definición nada se indica sobre la posición de la recta directriz.



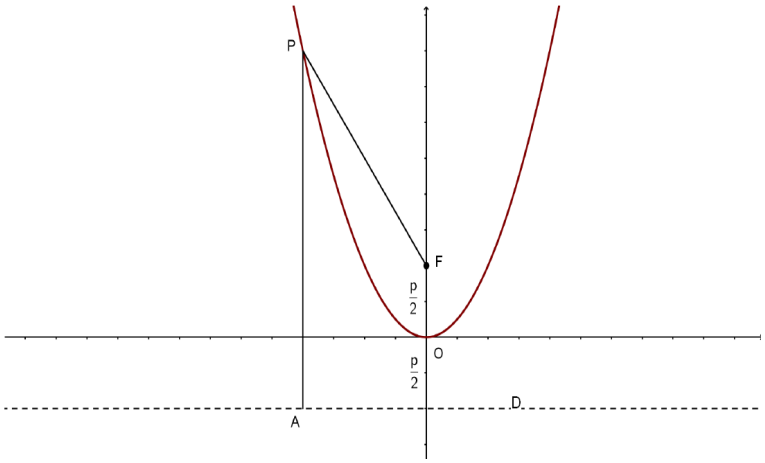
Parábola con vértice en el origen de coordenadas

La distancia entra la directriz y el foco se representa por p.

Supongamos que el foco es el punto $F(0,\frac{p}{2})$ y la directriz es la recta **D** de ecuación $y=-\frac{p}{2}$.

Cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la párábola de foco F y directriz **D** cumple, según la definición

$$d(F,P)=d(P,\mathbf{D}).$$



De la figura anterior, resulta que $d(P,\mathbf{D})=d(P,A)$, siendo el punto $A(x,\ -\frac{p}{2})$. Ahora bien, por un lado

$$d^2(F,P)=x^2+(y-\frac{p}{2})^2,$$

$$d^2(P,A)=(y+\frac{p}{2})^2$$

y además, usando que los primeros miembros son iguales, se tiene que

$$x^2+(y-\frac{p}{2})^2=(y+\frac{p}{2})^2,$$

desarrollando esta ecuación,

$$x^2+y^2-py+(\frac{p}{2})^2=y^2+py+(\frac{p}{2})^2.$$

Reduciendo términos y simplificando, se obtiene que

$$x^2=2py$$

o bien

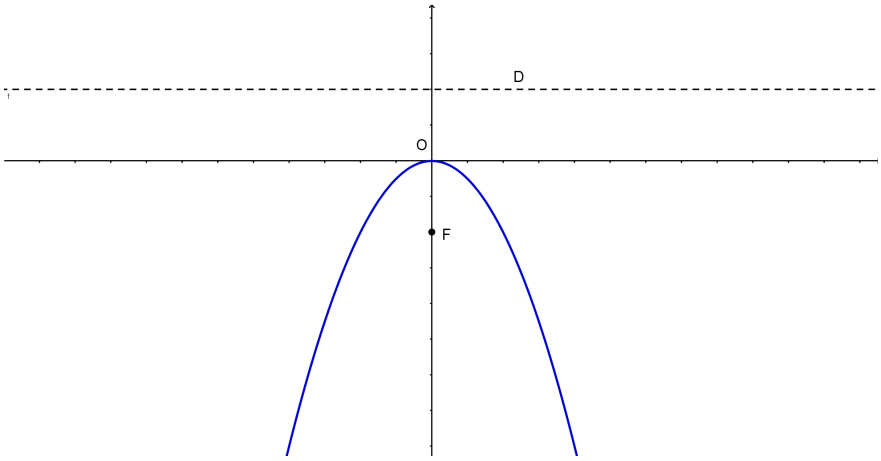
$$y=\frac{1}{2p}x^2.$$

Observación: $p\neq 0$ pues $F\notin\mathbf{D}$.

Análogamente, si consideramos que el foco tiene coordenadas $F(0,-\frac{p}{2})$ y que la directriz es la recta **D** de ecuación $y=\frac{p}{2}$ obtenemos la parábola de ecuación $x^2=-2py$.

Es decir la ecuación general de una parábola cuya directriz es paralela al eje x y cuyo foco está situado sobre el eje y es de la forma

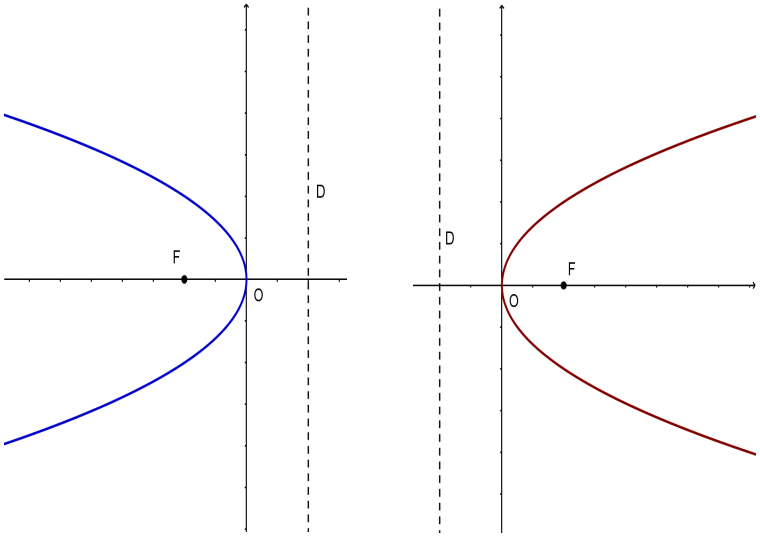
$$x^2=\pm 2py \tag{2.3}$$



Si intercambiamos x e y en el análisis anterior, obtenemos las ecuaciones

$$y^2 = \pm 2px. \tag{2.4}$$

Los gráficos de estas parábolas se muestran a continuación.



Observaciones:

- La ecuación (2.3) representa parábolas que son simétricas respecto del eje y ya que si un punto $P(x,y)$ satisface la ecuación, también lo hace el punto $P(-x,y)$. Decimos que el eje y es el eje de simetría de la parábola.
- Si consideramos las funciones cuadráticas cuyos gráficos son las parábolas de ecuación (2.3), esta condición implica que son funciones pares y que presentan un mínimo o un máximo absoluto en el origen de coordenadas. (Esto lo estudiaremos más adelante).
- La ecuación (2.4) representa parábolas que son simétricas respecto del eje x ya que si un punto $P(x,y)$ satisface la ecuación, también lo hace el punto $P(x,-y)$. También es fácil ver que estas parábolas no son el gráfico de ninguna función.
- En todos estos casos, el origen de coordenadas se llama **vértice** de la parábola.
  El vértice es el punto de la parábola que equidista del foco y la directriz en $\frac{p}{2}$. Este valor se denomina distancia focal.

- En general, decimos que el **eje de simetría** de una parábola es la recta que pasa por el vértice y es perpendicular a la directriz (o que contiene al foco).
- Cada sección de la gráfica que comienza en el vértice se llama rama. Si las ramas son hacia arriba la parábola tiene un mínimo en el vértice. Si las ramas son hacia abajo la parábola tiene un máximo en el vértice.
- Las ecuaciones (2.3) y (2.4) se denominan ecuaciones canónicas de la parábola.

Ejercicios 2.5

1. Sea $P(x,y)$ un punto que se mueve de manera tal que su distancia a la recta $x-2=0$ es igual a su distancia al punto $(0,3)$.
   - Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico dado anteriormente.
   - Graficar en GeoGebra y verificar la solución hallada.
   - Encontrar todos los elementos de la cónica anterior.
2. En los siguientes casos, utilizando GeoGebra hallar el vértice y el foco. Deducir la ecuación de la directriz y graficar la parábola:
   a) $x=2y^2$
   b) $4x^2=-y$
   c) $4y+x^2=0$
   d) $-3x=\frac{1}{2}y^2$
   e) Con GeoGebra pueden dibujarse parábolas ingresando el foco y la recta directriz en la herramienta correspondiente. Realizarlo para el foco y la directriz de cada una de las parábolas anteriores y comprobar que la ecuación obtenida en cada caso es la original.

Observación: Para realizar estos ejercicios utilizar los comandos *Foco* y *Directriz*. ■

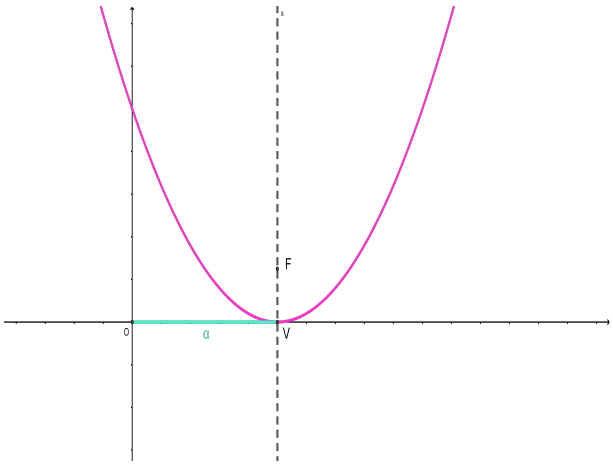
Ecuación general de una parábola

Supongamos que queremos encontrar la ecuación de una parábola de vértice $V(\alpha,\beta)$ y distancia focal $\frac{p}{2}$.

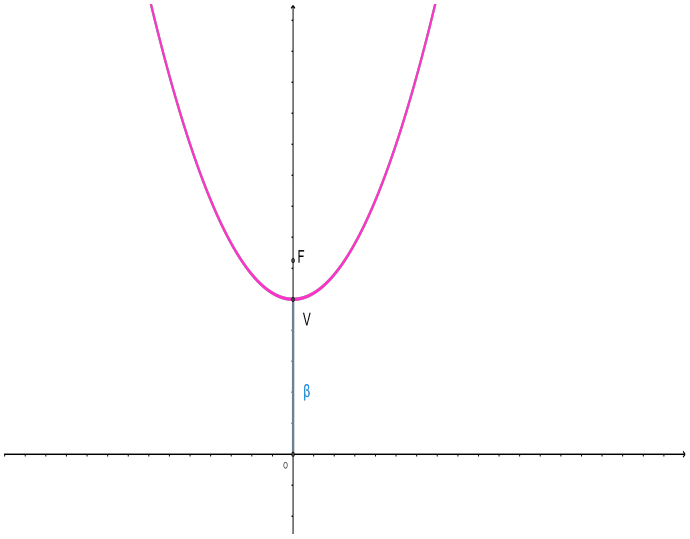
Si pensamos en la parábola de vértice en el origen y paramétro $\frac{p}{2}$, ya sabemos cuál es su posible ecuación de acuerdo a cuáles sean su eje de simetría y su foco.

Si queremos que el vértice se ubique en el punto $V(\alpha,\beta)$ es suficiente realizar una traslación del origen a este punto y así obtener la ecuación general de la parábola.

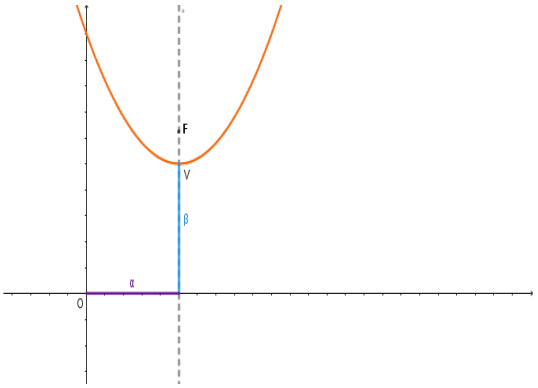
Veamos gráficamente qué ocurre. Si trasladamos el vértice α unidades sobre el eje x, tenemos que

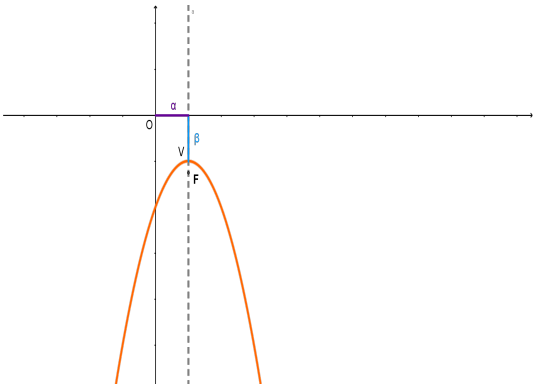


Si trasladamos el vértice β unidades sobre el eje y, vemos que



Haciendo las dos traslaciones simultánemente, es decir, situando el vértice en el punto de coordenadas $(\alpha,\ \beta)$, el gráfico resultante es de la forma La ecuación general de la parábola de eje





de simetría paralelo al eje y será

$$(x-\alpha)^2 = \pm 2p(y-\beta). \tag{2.5}$$

Análogamente, la ecuación general de la parábola de eje de simetría paralelo al eje x será

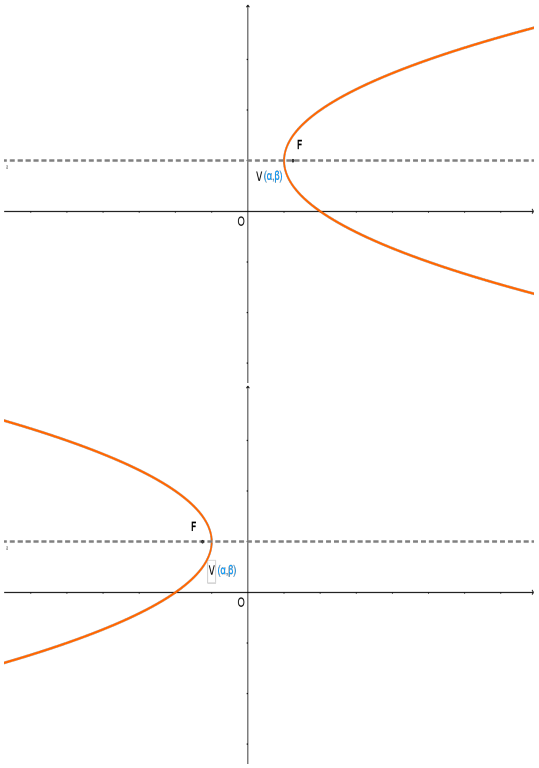
$$(y-\beta)^2 = \pm 2p(x-\alpha). \tag{2.6}$$

Observaciones: Consideremos la parábola de ecuación (2.5), entonces

- es claro que el eje de simetría es la recta de ecuación $x=\alpha$ paralela al eje y.
- Si la parábola se abre hacia arriba, el foco tiene coordenadas $F(\alpha,\ \beta+\frac{p}{2})$ y la directriz **D** es la recta de ecuación $y=\beta-\frac{p}{2}$.
- Si la parábola se abre hacia abajo, el foco tiene coordenadas $F(\alpha,\ \beta-\frac{p}{2})$ y la directriz **D** es la recta de ecuación $y=\beta+\frac{p}{2}$.

Consideremos la parábola de ecuación (2.6), entonces

- es claro que el eje de simetría es la recta de ecuación $y=\beta$, paralela al eje x.
- Si la parábola se abre hacia la derecha, el foco tiene coordenadas $F(\alpha+\frac{p}{2},\ \beta)$ y la directriz **D** es la recta de ecuación $x=\alpha-\frac{p}{2}$.
- Si la parábola se abre hacia la izquierda, el foco tiene coordenadas $F(\alpha-\frac{p}{2},\ \beta)$ y la directriz **D** es la recta de ecuación $x=\alpha+\frac{p}{2}$.



Ejercicios 2.6

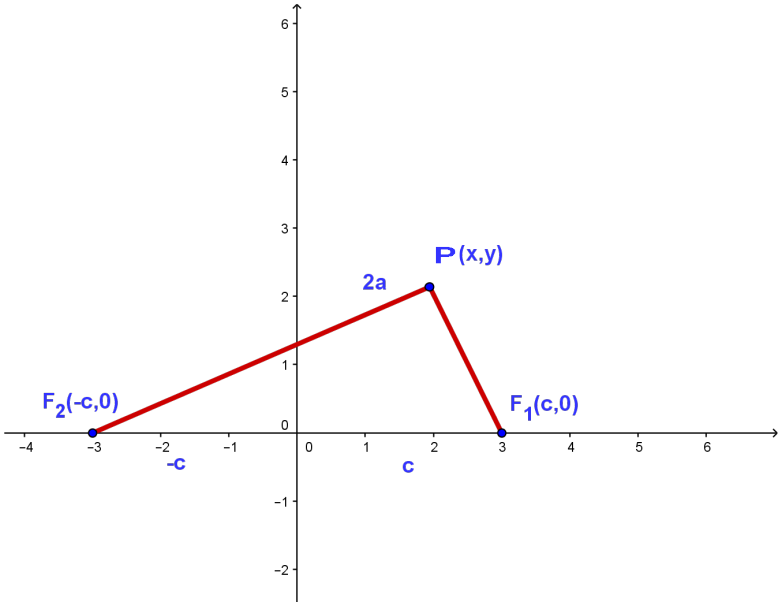
1. Determinar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1,3)$ y foco en $(2,3)$.
2. Determinar la ecuación canónica de la parábola con foco en $(-1,1)$ y directriz de ecuación $y=5$.
3. Hallar con GeoGebra la ecuación de la parábola con vértice $P(4,-3)$ y recta directriz $y=1$. Indicar cuál es su foco.
4. Hallar con GeoGebra la ecuación de la parábola con vértice $P(0,3)$ y recta directriz $x=-5$. Indicar cuál es su foco.
5. Considerar la parábola de ecuación $y=a(x-b)^2+c$ observar con GeoGebra cómo cambia la gráfica de la parábola al introducir deslizadores en "a","b" y "c".
   - Agregar la recta directriz y observar cómo cambia al mover los deslizadores.
   - Agregar el foco y observar cómo cambia al mover los deslizadores.
6. Considerar en GeoGebra los puntos : $A(0,-2), B(-2,2), C(2,2), D(-4,14), E(4,14)$. Hallar la ecuación de la parábola que pasa por dichos puntos, identificar su vértice, foco y su recta directriz.
7. Dada la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx$, utilizar deslizadores en GeoGebra para hallar los valores de "a" y "b" tales que dicha parábola pase por los puntos $A(2,8)$ y $B(-1,5)$. Indicar su vértice, foco y su recta directriz.
8. Graficar en GeoGebra la parábola de ecuación $x=-\frac{1}{4}(y-1)^2+3$, hallar una recta que pase por su vértice y sea perpendicular a la directriz de dicha parábola.
9. Encontrar con GeoGebra los puntos de intersección entre las parábolas de ecuación: $y=2(x-\frac{1}{2})^2+1$ y $x=2(y-1)^2-3$.
10. Hallar con GeoGebra la distancia entre las parábolas de ecuación: $y=2(x-\frac{1}{2})^2+1$ y $x=2(y-\frac{1}{2})^2+1$. Indicar sus respectivos vértices, focos y rectas directrices.
11. Hallar con GeoGebra la parábola cuya recta directriz es $y=1$ y su foco el punto

$P(3,4)$. Hallar también el punto de intersección de la parábola con el eje y.

12. Usando el comando *Tangente*, encontrar las rectas tangentes a las gráficas de las siguientes cónicas, que pasan por el punto $(0,5)$.
(a) $y^2-2y-2x+3=0$. (b) $x^2-4x+y^2-2y+1=0$.
¿Qué cónicas fueron representadas?
13. Dar condiciones sobre los coeficientes de la ecuación $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ para que las cónicas representadas sean circunferencias, parábolas de ejes de simetría paralelos al eje x o parábolas de ejes de simetría paralelos al eje y. ¿Cuándo se obtienen rectas o ningún lugar geométrico? Testear las respuestas graficando en GeoGebra .

2.2.3 Elipse

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos, llamados focos es constante y la denotamos $2a$. Dicha constante debe ser mayor que la distancia entre los focos.



Para hallar la ecuación de la elipse tomamos un punto $P(x,y)$ cualquiera de la elipse y veremos cuál es la ecuación que verifican sus coordenadas x e y. Usualmente se llama **eje focal** a la recta que pasa por los focos y **centro** al punto medio del segmento que los une.

Elipse de eje focal paralelo al eje x

Centro en el origen

Consideremos en primer lugar el caso en que los focos son puntos del eje de las abscisas y tienen coordenadas $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$. Un punto $P(x,y)$ estará en la elipse si y sólo si

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a.$$

Aplicando la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos, se tiene

$$d(P,\ F_1)=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ d(P,\ F_2)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

De modo que al sustituir,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Despejando el segundo radical y elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

Desarrollando los cuadrados de binomios y agrupando términos se tiene que,

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

Dividiendo ambos miembros po $4a \neq 0$ y elevando al cuadrado

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = a^2 + 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$(1 - \frac{c^2}{a^2})x^2 + y^2 = a^2 - c^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Ahora bien, recordemos que en todo triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos, lo que aplicado al triángulo $\overset{\triangle}{F_1PF_2}$, produce que:

$$d(P,\ F_1) + d(P,\ F_2) > d(F_1,\ F_2)$$

Sustituyendo,

$$2a > 2c$$

$$a^2 - c^2 > 0$$

La última desigualdad nos dice que la diferencia $a^2 - c^2$ es constante y positiva, de tal manera que podemos representarla por b^2, es decir,

$$a^2 - c^2 = b^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la elipse se expresa por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

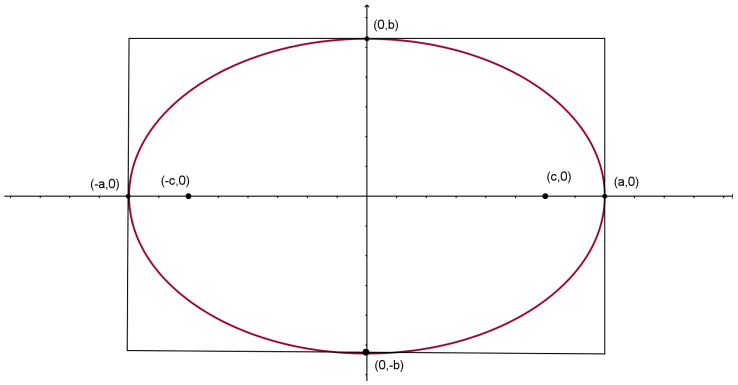
donde siempre $a > b$.

Esta ecuación se denomina **ecuación canónica** de la elipse de eje mayor x, eje menor y y distancia focal $2c$ y centro en $C(0,0)$.

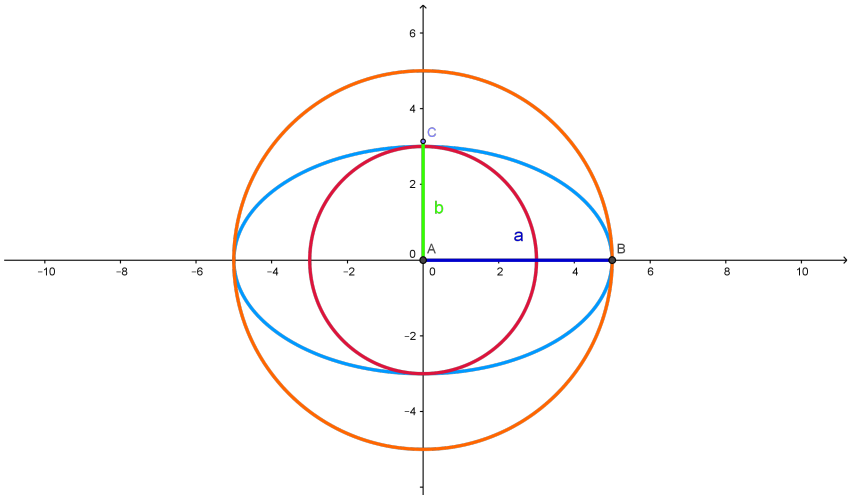
Análisis de la ecuación canónica de la elipse

- **Simetrías.**
  Es sencillo comprobar que la curva es simétrica respecto de los ejes coordenados y del origen de coordenadas. Para esto basta con notar que si (x,y) es un punto de la elipse, los puntos $(\pm x,\ \pm y)$ también lo son.
- **Intersecciones con los ejes coordenados.**
  Si en la ecuación $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ hacemos $y = 0$, resulta: $x = \pm a$, de modo que los puntos de intersección de la curva con el eje de las abscisas son $A_1(a,0)$ y $A_2(-a,0)$. Las intersecciones de la elipse con su eje focal o mayor se denominan **vértices**. El segmento que une los vértices se denonima **eje mayor**.
  Si en la ecuación $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ hacemos $x = 0$, resulta $y = \pm b$, de tal manera que las intersecciones con el eje de las ordenadas son $B_1(0,b)$ y $B_2(0,-b)$. Estos puntos se llaman **covértices**. El segmento que une los covértices se denonima **eje menor**.

- **Rango.**
  La ecuación $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ permite ver que para que y esé definido x solamente puede variar desde $-a$ hasta a. Del mismo modo, la ecuación $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$ justifica que y únicamente pueda variar desde $-b$ hasta b. En síntesis, la elipse esta acotada dentro del rectángulo que muestra la figura. decimos que a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor.



- **Excentricidad.**
  Un elemento importante de una elipse es su excentricidad que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa usualmente con la letra e.
  Es decir, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.
  Como $c < a$, la excentricidad de una elipse es un número menor que 1 y da una idea de cúanto se aleja una elipse de una circunfencia en la cual $a = b$ (y por lo tanto la excentricidad es igual a 0.)



Centro desplazado del origen

Consideremos ahora una elipse con centro $C(h,k)$ y con su eje mayor paralelo al eje de las x.

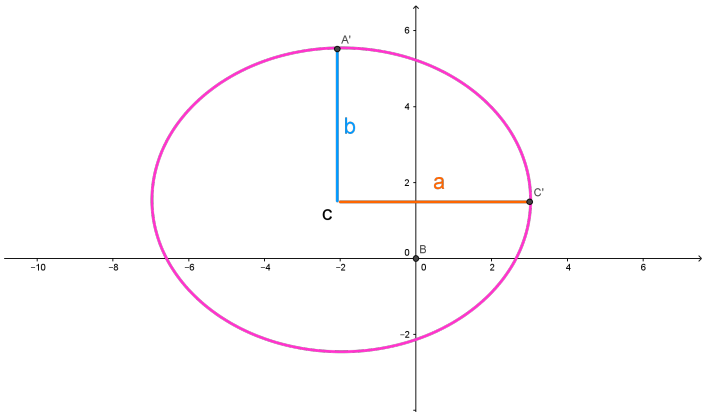
Para encontrar la ecuación que la representa se puede repetir el proceso anterior o bien, realizar una traslación de coordenadas. Esto es, considerar la transformación dada por

$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

que permite escribir la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

con $a^2-c^2=b^2$.



Elipse de eje focal paralelo al eje y

Análogamente a lo realizado cuando el eje focal es paralelo al eje x, se puede encontrar la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$ que está dada por

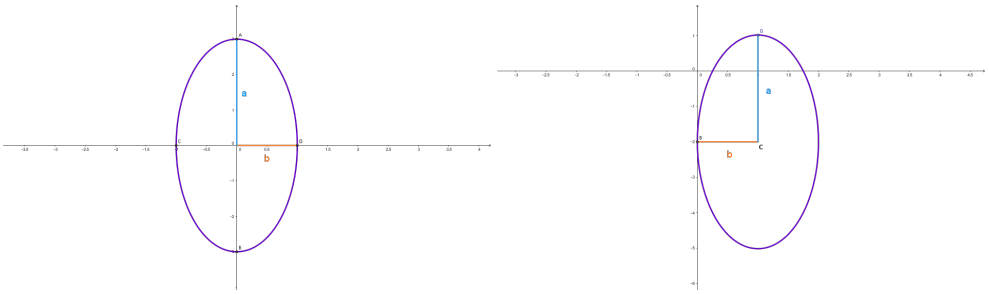
$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1,$$

con $a^2-c^2=b^2$.

Si la elipse tiene su eje mayor paralelo al eje de las y y su centro es el punto $C(h,k)$, la ecuación que la representa es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

con $a^2-c^2=b^2$.



Ejercicios 2.7

1. Sea $P(x,y)$ un punto que se mueve de manera tal que la suma de sus distancias a los puntos $(-2,1)$ y $(4,1)$ es siempre 10.
   - Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico dado anteriormente.
   - Graficar en GeoGebra y verificar la solución hallada.
   - Encontrar todos los elementos de la cónica anterior.
2. Mostrar que la curva de ecuación $9x^2+16y^2=144$ es una elipse. Graficar usando GeoGebra y determinar los focos.

3. Determinar los focos y vértices de las siguientes elipses. Usando GeoGebra hacer sus gráficas
   - $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$
   - $\frac{9x^2}{2}-18x+4y^2=27$
   - $\frac{18x^2}{16}+\frac{25y^2}{4}=11$
4. Ingresando en GeoGebra los focos y un punto de la elipse, el programa la dibuja y nos muestra su ecuación. Realizar este proceso para las elipses del ítem anterior y comprobar los resultados obtenidos.
5. Graficar en GeoGebra y calcular la excentricidad de las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$ para distintos valores de a.
6. Dados los focos $(0,\ \pm 4)$ de una elipse y su excentricidad $e=4/5$, hallar todos sus elementos (ecuación canónica, vértices, longitud del eje mayor, longitud del eje menor), verificarlos con GeoGebra y graficar.

■

Ejercicios 2.8

1. Realizar las gráficas de las siguientes elipses y reconocer los vértices, covértices, focos y longitudes de los ejes mayor y menor. Verificar con GeoGebra .
   - $4x^2+16y^2=200$
   - $5x^2+2y^2=10$
   - $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$
   - $16x^2+25y^2+32x-100y-284=0$
2. Teniendo en cuenta los siguientes comandos para graficar una elipse elegir el más conveniente, según los datos, para obtener las ecuaciones de las elipses que se indican y graficarlas.

   Comandos

   • Cónica[Punto A, Punto B, Punto C, Punto D, Punto E]: Produce la sección cónica que pasa por los cinco puntos dados A, B, C, D y C.

   Observación: Ver también la herramienta *Cónica dados Cinco de sus Puntos*.

   • Elipse[Punto F, Punto G, Nómero a]: Crea la elipse con puntos focales F y G y eje principal de longitud a.

   Observación: Condición: 2a >Distancia[F, G]

   • Elipse[Punto F, Punto G, Segmento]: Crea la elipse con puntos focales F y G siendo la longitud del eje principal igual a la del segmento dado, para ello debe primero ingresar los puntos extremos del segmento y crear el segmento.

   • Elipse[Punto A, Punto B, Punto C]: Crea una elipse con puntos focales A y B que pasa a través del punto C.

   Elipses:

   a) Centro en el origen, un foco $(2,0)$ y un vértice en $(3,0)$.

b) Focos $(0,\pm 5)$ y eje mayor de longitud 14.
c) Vértices $(3,1)$ y $(3,9)$ y eje menor de longitud 6.
d) Vértices $(5,-3)$ y $(5,7)$ y focos $(5,2\pm\sqrt{21})$.
e) Focos $(2,3)$ y $(6,3)$ y excentricidad $\frac{2}{3}$.
f) Foco $(2\sqrt{6},6)$, centro $(0,6)$ y pasa por el punto $P(4,\frac{33}{5})$.
g) Centro en $(1,4)$, un foco en $(1,8)$ y excentricidad $e=\frac{1}{5}$
h) Distancia focal= 8, excentricidad= $\frac{4}{5}$, eje focal= eje y, simetría sobre los ejes coordenados.
i) Eje menor= 24, distancia focal= 10, eje focal= eje x, centro de simetría el origen de coordenadas.
j) Eje sobre los ejes coordenados y los puntos $A(4,3)$ y $B(-1,4)$ pertenecientes a la elipse.
k) $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ y el punto $A(6,4)$ pertenece a la elipse.
l) Ingresar en la barra de entrada de GeoGebra la ecuación $\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1$ y calcular la excentricidad de la misma. Utilizar el deslizador para poder variar los parámetros A y B, a través de esto, mostrar cómo varía la excentricidad de las diferentes elipses. Observar y anotar conclusiones.

■

Observación: En 1609 Johannes Kepler demostró que las órbitas de los planetas del Sistema Solar son elípticas y que el Sol es uno de sus focos. Mostramos en el recurso

`www.mate.unlp.edu.ar/extension/geometriaygeogebra/sistemasolar.ggb`

una aplicación de GeoGebra para representar el movimiento de los planetas de dicho sistema.

2.2.4 Hipérbola

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos cuyo valor absoluto de la diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual a $2a$, siendo a una constante positiva tal que $2a$ es menor que la distancia entre los focos. El eje que contiene a los focos se llama **eje focal** y el punto medio entre ellos se denomina **centro**.

Hipérbola de eje focal paralelo al eje x

Centro en el origen.

Consideremos en primer lugar el caso en que los focos son puntos del eje de las abscisas. Es decir, sean los puntos $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$.

Un punto $P(x,y)$ estará en la hipérbola sí y sólo sí

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a.$$

Como mostramos anteriormente, aplicando la fórmula para determinar la distancia entre dos puntos, se tiene:

$$d(P,\ F_1)=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ \ d(P,\ F_2)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Luego, la condición que verifican los puntos de una hipérbola es

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a.$$

Esta condición es equivalente a las dos relaciones

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=-2a$$

$$d(P,F_1)-d(P,F_2)=2a$$

Consideremos la primera posibilidad solamente ya que el segundo caso es totalmente análogo al primero.

Despejando al segundo radical y elevando al cuadrado ambos miembros

$$(x-c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Desarrollando los cuadrados de binomios y agrupando términos se tiene que

$$4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=-(4a^2+4cx).$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad y teniendo en cuenta que $a\neq 0$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2,$$

$$(1-\frac{c^2}{a^2})x^2+y^2=a^2-c^2,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1.$$

Ahora bien, recordemos que en todo triángulo cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia, aplicándolo al triángulo $\overset{\triangle}{F_1PF_2}$ obtenemos,

$$d(P,\,F_1)-d(P,\,F_2)<d(F_1,\,F_2).$$

Sustituyendo,

$$2a<2c,$$

$$c^2-a^2>0.$$

La última desigualdad nos muestra que la diferencia c^2-a^2 es constante y positiva, de tal manera que podemos representarla por b^2, es decir

$$c^2-a^2=b^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola se puede escribir como

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

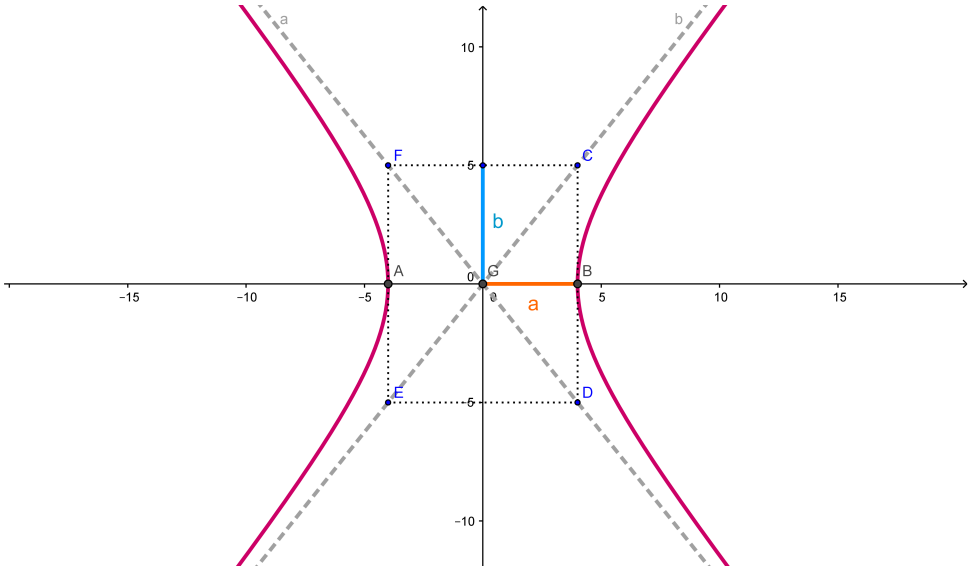
con $c^2-a^2=b^2$. Esta ecuación de la hipérbola se denomina **canónica**.

Análisis de la ecuación canónica de la hipérbola

- **Simetrías.** Es sencillo comprobar que la curva es simétrica respecto de los ejes coordenados y del origen de coordenadas. Para esto basta con notar que si (x,y) es un punto de la elipse, los puntos $(\pm x,\,\pm y)$ también lo son.
- **Intersecciones con los ejes coordenados.**
  Si en la ecuación $x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2}$ hacemos $y=0$, resulta: $x=\pm a$, de modo que los puntos de intersección de la curva con el eje de las abscisas son $A_1(-a,0)$ y $A_2(a,0)$. Las intersecciones de la hipérbola con su eje focal o mayor se denominan **vértices**.
  Si en la ecuación $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ hacemos $x=0$, vemos que no existen intersecciones con el eje de las ordenadas. Los puntos $B_1(0,-b)$ y $B_2(0,b)$ se toman como extremos de un segmento llamado **eje conjugado** cuya longitud es $2b$.

- **Excentricidad.**
  Un elemento importante de una hipérbola es su excentricidad que se define como la razón $\frac{c}{a}$ y se representa usualmente con la letra e.
  Es decir, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.
  Como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es un número mayor que 1.
- **Asíntotas.**
  Otro elemento fundamental para las hipérbolas son dos rectas asociadas que se denominan **asíntotas** cuyas ecuaciones son

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$



Centro desplazado del origen

Consideremos ahora una hipérbola con centro $C(h,k)$ y con su eje focal paralelo al eje de las x.

Para encontrar la ecuación que la representa se puede repetir el proceso anterior o bien, realizar una traslación de coordenadas. Esto es, considerar la transformación dada por

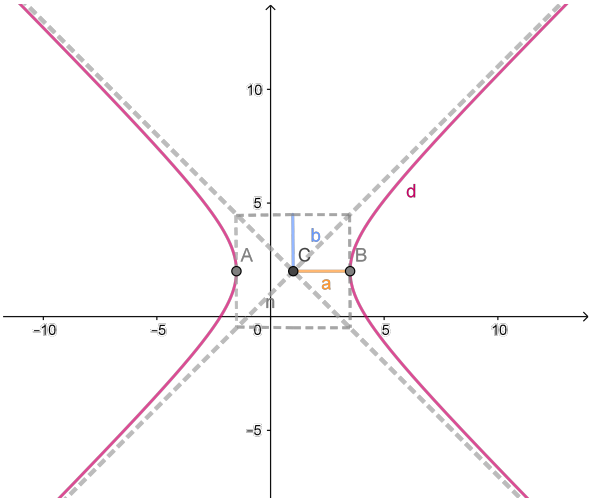
$$x' = x - h \quad \text{e} \quad y' = y - k$$

que permite escribir la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

En este caso las ecuaciones de las asíntotas son

$$y - k = \pm\frac{b}{a}(x-h)$$



Hipérbola de eje focal paralelo al eje y

Análogamente a lo realizado cuando el eje focal es paralelo al eje x, se puede encontrar la ecuación de una hipérbola cuyos focos son los puntos $F_1(0,-c)$ y $F_2(0,c)$ que está dada por

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

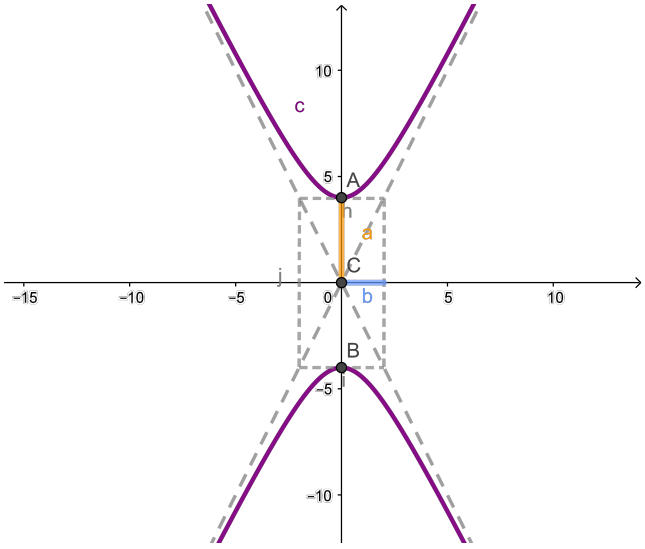
con $c^2 - a^2 = b^2$. Si la hipérbola tiene su eje mayor paralelo al eje de las y y su centro es el punto $C(h,k)$, la ecuación que la representa es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1,$$

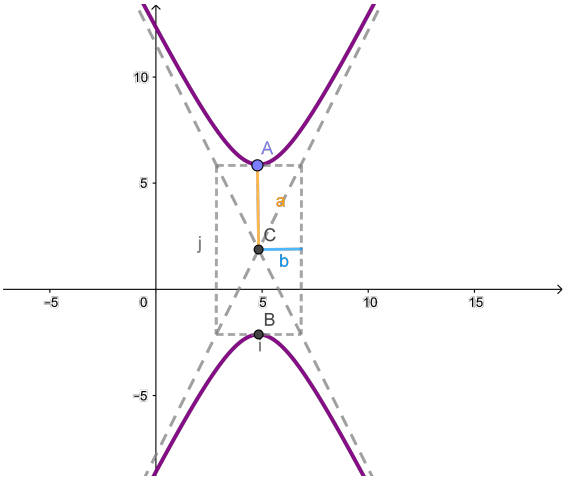
con $c^2 - a^2 = b^2$.

En este caso las ecuaciones de las asíntotas son

$$y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)$$

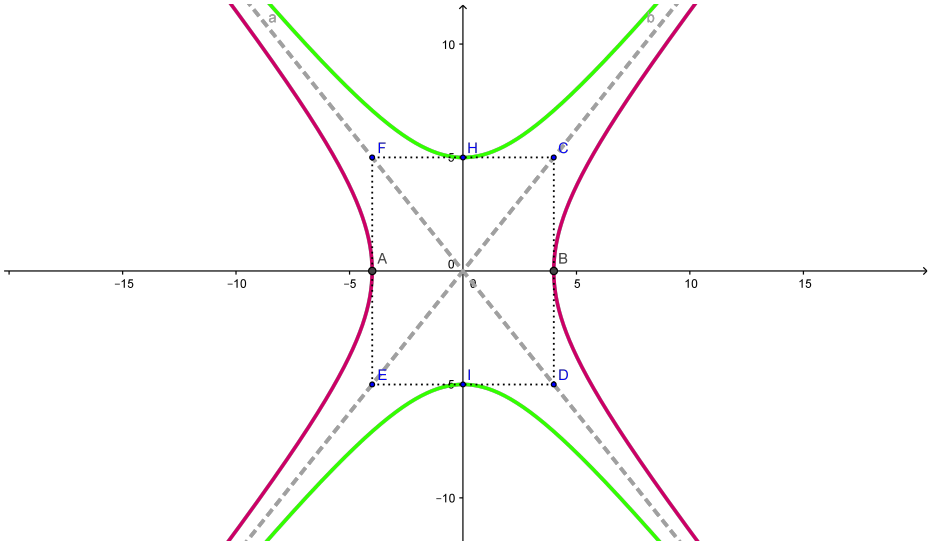


Hipérbola de eje focal y, centro en el origen.



Hipérbola de eje focal y, centro desplazado.

Observación: Las hipérbolas $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ y $\dfrac{(y-k)^2}{b^2}-\dfrac{(x-h)^2}{a^2}=1$ se denominan hipérbolas conjugadas



Ejercicios 2.9

1. Sea $P(x,y)$ un punto que se mueve de manera tal que su distancia a la recta $x+3=0$ es siempre 2 unidades mayor que su distancia al punto $(1,1)$.
   - Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico dado anteriormente.
   - Graficar en GeoGebra y verificar la solución hallada.
   - Encontrar todos los elementos de la cónica anterior.
2. Dadas las ecuaciones de las hipérbolas, representarlas e indicar las coordenadas de los focos y de los vértices, las ecuaciones de las asíntotas y la excentricidad. Verificar con GeoGebra .
   - $16x^2-9y^2=144$
   - $2x^2-3y^2=8$
   - $x^2-4y^2=4$

- $x^2 - y^2 = 1$

3. Explicar las diferencias entre los distintos comandos para la construcción de las hipérbolas.

   Comandos:

   • Herramienta "Hipérbola".

   • Hipérbola[Punto F, Punto G, Número a]: Crea la hipérbola con puntos focales F y G y eje principal de longitud a.

   Condición: 0 <2a <Distancia[F, G]

   • Hipérbola[Punto F, Punto G, Segmento s]: Crea la hipérbola con puntos focales F y G siendo la longitud del eje principal igual a la del segmento s (a = Longitud[s]).

   • Hipérbola[Punto A, Punto B, Punto C]: Crea la hipérbola con puntos focales A y B que pasa por el punto C.

   Hipérbolas:
   a) $V_1(5,0), V_2(-5,0), F_1(7,0), F_2(-7,0)$.
   b) $V_1(0,7), V_2(0,-7)$, excentricidad=$\frac{4}{3}$.
   c) $F_1(0,10), F_2(0,-10), A(2,3)$ pertenece a la hipérbola.
   d) Las asíntotas son $y = \pm\frac{1}{2}x$, la distancia focal es 10, eje focal = eje y.
   e) Las asíntotas son $y = \pm\frac{3}{5}x$, pasa por el punto $A(10,\sqrt{3})$.
   f) Centro en el origen, los focos en el eje de abscisas, la distancia entre los focos es $2c = 20$ y asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$.
   g) Centro en $(-5,3)$, un vértice $(-5,7)$ y un foco $(-5,8)$.
   h) Focos $(2,3)$ y $(6,3)$ con excentricidad 2.
   i) Vértices $(4,-2)$ y $(0,-2)$ que pasa por el punto $P(6,3\sqrt{3}-2)$.

4. Ingresar la ecuación $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ y calcular la excentricidad de la misma. Utilizar el deslizador para poder variar los parámetros A y B, a través de esto mostrar cómo varía la excentricidad de las diferentes hipérbolas. Observar y anotar conclusiones.
5. Utilizando el programa GeoGebra , comprobar que $F_1(6,5)$ y $F_2(-2,-1)$ y $a = 3$ definen una hipérbola. Hallar su centro, la ecuación del eje focal y decidir si $P(1,-2)$ pertenece a la misma.

■

Observación: En los siguientes recursos de GeoGebra

`www.mate.unlp.edu.ar/extension/geometriaygeogebra/optica1.ggb`

`www.mate.unlp.edu.ar/extension/geometriaygeogebra/optica2.ggb`

se puede ver una aplicación de elipse e hipérbola a la óptica geométrica.

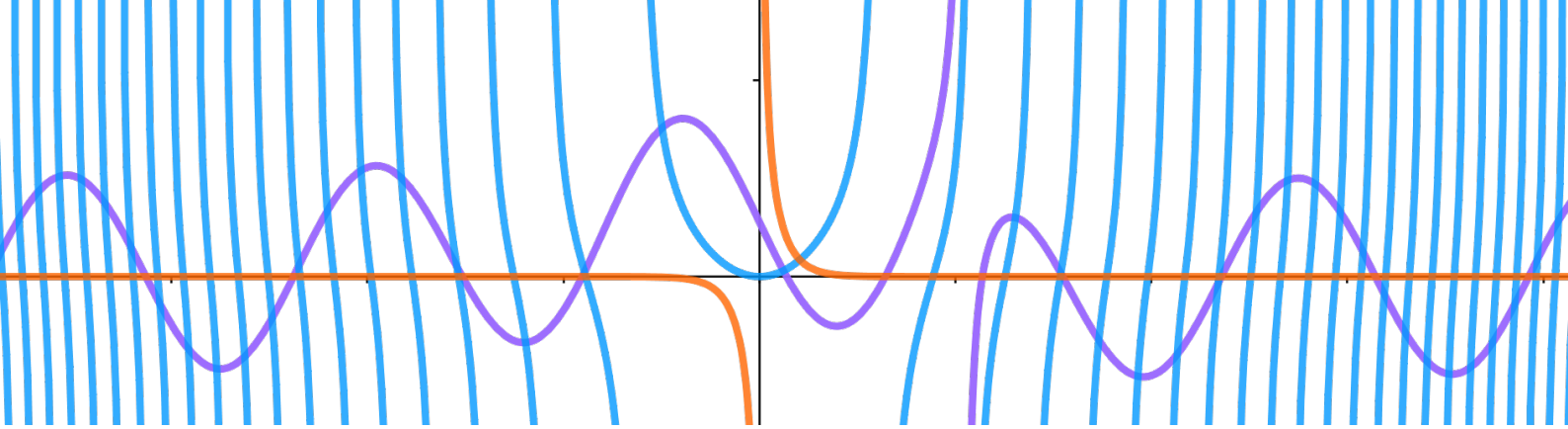
Ejercicios 2.10

1. Identificar las siguientes cónicas escribiendo sus ecuaciones canónicas. Graficar en GeoGebra y mostrar sus elementos.
   a) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$.
   b) $4x^2 + 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$.

c) $4x^2+4y^2-16x-8y=0$.
d) $25x^2-5x-18y-40=0$.
e) $9y^2-8x-18y-36=0$.

2. Dadas las siguientes ecuaciones:
   a) $k(k-1)x^2+(k+1)y^2=1$
   b) $x^2+ky^2-6x+2ky+1=0$

   cambiar los valores del parámetro k y anotar el rango para la obtención de las diferentes cónicas que se generan utilizando GeoGebra . Luego, justificar en forma analítica.



Bibliografía

Larson, R., Hostetler, R., Edwards, B.; *Cálculo y Geometría Analítica*, Mc Graw-Hill, 1999.

Lehmann, C.; *Geometría analítica*, ed. Limusa, 2012.

Leithold, L.; *El Cálculo, con Geometría Analítica*, 7ma. edición, Oxford University Press, 1994.

Rider, P.; *Geometría analítica*, Montaner y Simón editores, 1962.

Stewart, J.; *Cálculo de una variable trascendentes tempranas*, International Thomson Editores, 2001.

Tajani, M., Vallejo, M.; *Cálculo infinitesimal y geometría analítica*, Cesarini Hnos editores, 1981.