ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)

(Grupo Ciencias)

TRABAJO PRÁCTICO 2

1. Hallar el dominio para las siguientes funciones y luego encontrar una expresión de las mismas.

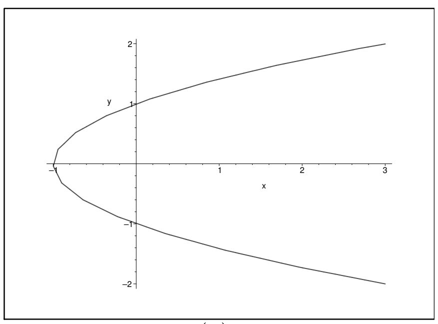
   a) El perímetro p de un cuadrado como función de la longitud l del lado.

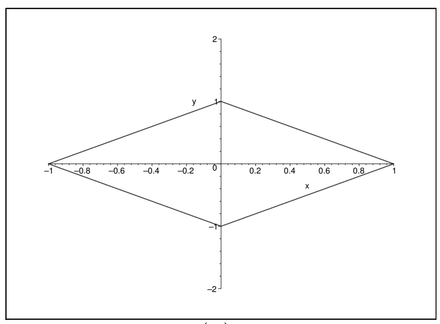
   b) El costo p de l lámparas si cada una cuesta 4 pesos. Qué diferencia hay entre esta función y la del inciso anterior?

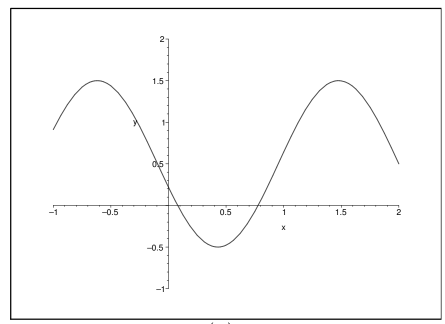
   c) El área de un triángulo equilátero como la función de la longitud x de un lado. Lo mismo para el perḿetro.

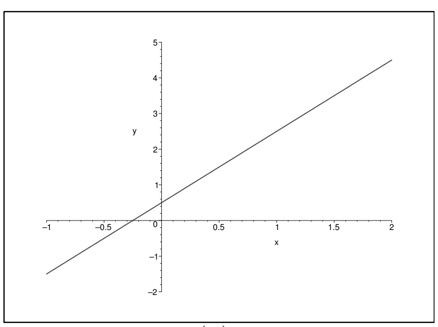
   d) La longitud de un lado de un cuadrado como función de la longitud d de la diagonal.

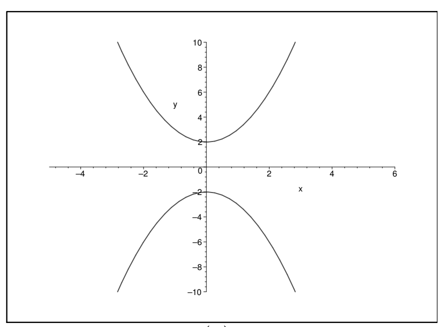
2. No toda curva del plano es el gráfico de una función. En vista de la definición de función y de su gráfico, indique cuáles de los siguientes dibujos corresponden a la gráfica de alguna función:

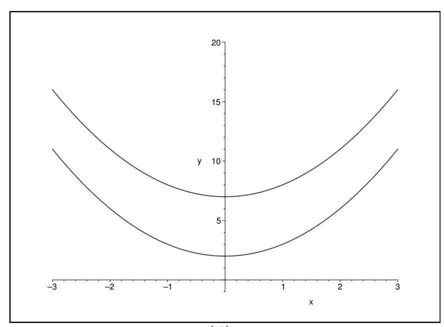

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


(f)

3. Determinar, justificando, si y es una función de x para cada uno de los siguientes casos:

   a) $x^2 + y^2 = 9$

   b) $y^2 = x^2 - 1$

   c) $x^2 + y = 3$

   d) $x^2y - x^2 + 4y = 0$

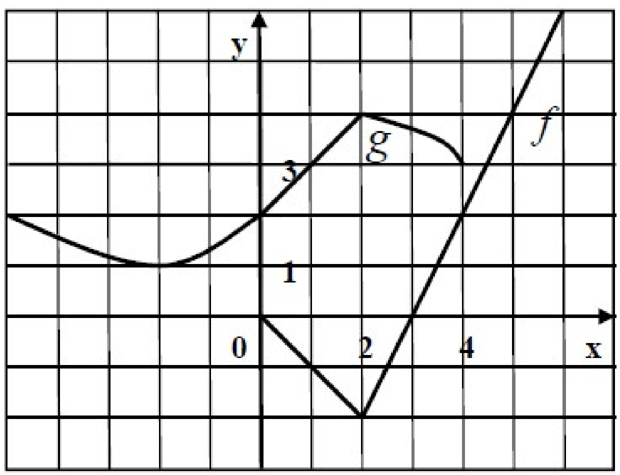
4. Determinar los dominios de las siguientes funciones:

   a) $k(x) = x^4 + 5x - \sqrt{x}$
   b) $h(y) = \sqrt[3]{\frac{y+1}{y^3-1}}$
   c) $g(u) = \sqrt{u^3 - 3u}$
   d) $f(x) = \frac{x}{x^2+x}$

5. Dada la función $j(x) = 2 + \sqrt{x}$, utilizando las funciones del ejercicio 4, hallar el dominio y una expresión de las siguientes funciones:

   a) $(k + j)(x)$
   b) $(j \cdot k)(u)$
   c) $\left(\dfrac{j}{g}\right)(t)$
   d) $(j \circ f)(x)$

6. Use las gráficas dadas de f y g para evaluar cada expresión, o bien, explique por qué no está definida.



   a) $f(g(2))$
   b) $g(f(0))$
   c) $(f \circ g)(0)$
   d) $(g \circ f)(6)$
   e) $(g \circ g)(-2)$
   f) $(f \circ f)(4)$

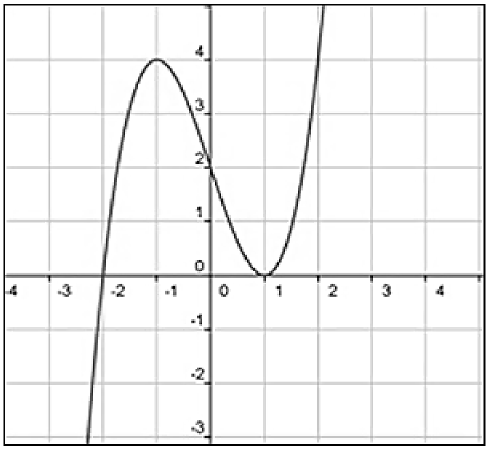
7. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Sabiendo que el dominio de f es $\mathbb{R} - \{0\}$ y el dominio de g es $[0, +\infty)$, hallar el dominio de cada una de las siguientes funciones y las expresiones de las mismas:

   a) $(g \circ f)(x)$
   b) $f(g(x))$
   c) $g(g(x))$
   d) $(f \circ f)(x)$.

8. Dadas las siguientes funciones, indicar los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$. Obtener una expresión para esas funciones.

   a) $f(x) = x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{4x-2}$
   b) $f(x) = x^2 - x - 6$ y $g(x) = \sqrt{x}$
   c) $f(x) = |3 - x|$ y $g(x) = \sqrt{x}$

9. Si la función $h(x)$ tiene la gráfica de la figura, dibuje la gráfica de las siguientes funciones:



   a) $h(x+4)$
   b) $h(x)+4$
   c) $2h(x)$
   d) $-\frac{1}{3}h(x-1)$

10. Interpretar las definiciones de función par y función impar en términos de reflexiones respecto a los ejes.

11. Determinar analíticamente si las siguientes funciones son pares o impares y cuando sea posible verificarlo gráficamente:

   a) $f(x) = 2x^2 + 1$
   b) $f(x) = 3x^3$
   c) $f(x) = x^3 - x$
   d) $f(x) = x^4 - x^2$

12. Hay funciones que no son pares ni impares, verificar que $f(x) = x^7 - x^2$ es una de ellas.

13. Determinar cuáles de las funciones del ejercicio 11) son inyectivas.

14. Analizar si las siguientes funciones admiten inversa y, en caso afirmativo, dar su expresión.

   a) $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.
   b) $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$.
   c) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   d) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   e) $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.
   f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$
   g) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$
   h) $f : (-\infty, 0] \to (-\infty, 4]$, $f(x) = 4 - x^2$

Ejercicios adicionales:

15. a) Probar que la única función que es par e impar a la vez es la función nula.

    b) Mostrar que $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ es una función par y que $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$ es una función impar.

    c) Probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se puede escribir como suma de una función par y otra función impar. Probar que esta descomposición es única.

16. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función lineal (es decir de la forma $f(x) = ax + b$). Probar que si f no es constante entonces f admite inversa. Además, la inversa es otra función lineal.

17. Sea f una función homográfica (es decir de la forma $f(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$, $x \neq -\dfrac{d}{c}$, donde $bc - da \neq 0$). Determinar la imagen de f y probar que $f : Dom(f) \to Img(f)$ tiene inversa y que ésta es también una función homográfica.