ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)
TRABAJO PRÁCTICO 13: POLINOMIOS DE TAYLOR

Ejercicio 1. Hallar el polinomio de Taylor centrado en $x = 0$ de orden 3 para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = e^{-x}$

(b) $f(x) = x^2 e^{-x}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

(d) $f(x) = \arctan(x)$

En cada caso, dibujar la función y el polinomio. (Puede utilizar GeoGebra).

Ejercicio 2. Hallar el polinomio de Taylor de orden 4 alrededor de $x = 1$ para la función $f(x) = \ln(x)$. Utilizar este polinomio para aproximar $\ln(9/10)$ y $\ln(10/9)$, acotando el error cometido.

Ejercicio 3. Utilizar un polinomio de Taylor de la función $f(x) = e^x$ alrededor de $x = 0$ para:

(a) Calcular el valor del número e con un error menor que 10^{-4}.

(b) Calcular el valor de $\sqrt[4]{e}$ con un error menor que 10^{-3}.

Ejercicio 4. Considerar las funciones $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = \cos(x)$.

(a) Encontrar las expresiones de sus polinomios de Taylor de orden n alrededor de $x = 0$.

(b) Para cada función, hallar una cota para el error de aproximación en el intervalo $[0, \pi]$ en términos de n.

Ejercicio 5.

(a) Hallar la expresión del polinomio f de grado 3 del que sabemos que $f(0) = 2$, $f'(0) = f''(0) = 6$ y $f'''(0) = -12$.

(b) Utilizando el desarrollo de Taylor, escribir $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ como un polinomio en potencias de $x - 1$.

Ejercicio 6. Sea $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}\, dt$ definida para $x > 0$,

(a) Hallar los polinomios de Taylor de grados 2 y 3 de f alrededor de $x = 1$.

(b) Aproximar el valor de $f(1,1)$ usando el polinomio de Taylor anterior de grado 2 y estimar el error cometido.

Ejercicio 7. Utilizando desarrollos de Taylor adecuados, calcular los siguientes límites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)}{x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{e^x-x-1}}{x}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)-x+1}{(x-1)^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x)-\pi/4}{x-1}$

Ejercicio 8. Usando desarrollos de Taylor adecuados, determinar cuáles de las siguientes integrales impropias convergen:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$

Ejercicio 9. Calcular las siguientes integrales con un error menor que 10^{-3}:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)-1}{x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx$

Ejercicios adicionales

Ejercicio 10.

a) Estimar el valor de $\sqrt[3]{28}$ utilizando un polinomio de Taylor de grado 2. Calcular el error de aproximación cometido.

b) Estimar el valor de $\sqrt{e}$ con un error menor que 10^{-4}.

Ejercicio 11. Supongamos que el polinomio de Taylor de orden 5 de f en $x_0=2$ es

$$p(x)=(x-2)^5+3(x-2)^4+3(x-2)^2-8.$$

a) Comprobar que $x_0=2$ es un extremo local y clasificarlo.

b) Calcular $f^{(3)}(2)$ y $f^{(4)}(2)$.

c) ¿Se puede conocer el valor de $f^{(6)}(2)$? ¿Cuánto vale $f^{(6)}(2)$ si el polinomio p es de orden 7?

Ejercicio 12. Una función f satisface la ecuación $(5x+1)f'(x)+f(x)=1$. Supongamos que $f(0)=2$ y existe $f^{(5)}(0)$. Hallar el polinomio de Taylor de orden 5 en $x=0$.

Ejercicio 13. Sean $f(x)=\sqrt{ax+1}$ y $p(x)=1+2x+bx^2$.

(a) Determinar los valores de a y b para que $p(x)$ sea el polinomio de Taylor de f de orden 2 en $x=0$.

(b) Para los valores de a y b encontrados, utilizar el polinomio de Taylor para aproximar $\sqrt{0,6}$.

Ejercicio 14. Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)dt}{x^3}$$

(sugerencia: escribir un desarrollo de Taylor adecuado para $\operatorname{sen}(t^3)$ utilizando convenientemente el desarrollo de $\operatorname{sen}(u)$)