ANÁLISIS MATEMÁTICO I (2022)
(FHOM)
Trabajo Práctico 12: Integrales impropias

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen, utilizando la definición. De ser así, calcular a qué valor lo hacen.

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^{2/3}}\,dx$

c) $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{5-x}\,dx$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

g) $\displaystyle\int_1^\infty e^{-x}\,dx$

h) $\displaystyle\int_1^\infty e^{x}\,dx$

Ejercicio 2. Sea f una función continua en el intervalo $[a,b)$ tal que $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Analizar la validez de la siguiente proposición:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ es convergente si y sólo si } \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \text{ es convergente.}$$

Ejercicio 3. a) Estudiar para qué valores de $s \in \mathbb{R}^+$ convergen las siguientes integrales impropias y para cuáles no:

I) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^s}\,dx$

II) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\,dx$

b) Comparar con lo obtenido en los inciso $a)-e)$ del Ejercicio 1.

Ejercicio 4. a) Demostrar que la integral impropia

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx$$

es convergente.

b) Explicar por qué dicha integral no es igual a $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx - \int_1^\infty \frac{1}{1+x}\,dx.$

Ejercicio 5. Analizar si las siguientes integrales son impropias. Determinar si convergen y, de ser así, calcular a qué valor lo hacen.

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{4+x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^x\sqrt{e^x+1}\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln(x)\, dx$

g) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2}{x^2-4x+3}\, dx$

h) $\displaystyle\int_{-2}^\infty (3x+6)e^{-(x+2)}\, dx$

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{1-x^4}}\, dx$

j) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx$

Ejercicio 6. Utilizando el criterio de comparación, determinar si las siguientes integrales impropias convergen:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{1+x^6}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(u)}{\sqrt[4]{u}}\, du$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1-x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_{10}^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x}\, dx$

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t-t^4}\, dt$

g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{x\ln(x)}\, dx$

h) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{3e^{3x/2}-2e^x+2e^{x/2}}{e^{2x}-2e^{3x/2}+3e^x-4e^{x/2}+2}\, dx$

Ejercicio 7.

a) Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{1+x^2}\, dx$ es convergente.

b) Mostrar que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos^2(x)\, dx$ es convergente.

c) Mostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(x)|^n}{x}\, dx$ es divergente.

Ejercicio 8. Mostrar que la siguiente integral es convergente:

$$\int_0^\infty \frac{sen(x)}{x}\, dx$$

Ejercicio 9. Demostrar que las siguientes integrales son absolutamente convergentes:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin\left(3x^7 - 5x\right) dx$

b) $\displaystyle\int_2^{\infty} e^{-3x} \cos\left(e^x - x^3\right) dx$

Ejercicio 10. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^{7/2} + 6x + 1} dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x} \operatorname{sen}(x)\, dx$

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{-x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{-\ln(x)}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{2x} e^{-x^2}\, dx$

f) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{t^2 + 1}{e^t + \ln(t)}\, dt$

g) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan\theta\, d\theta$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$

Aplicaciones

Ejercicio 11. Calcular el volumen de sólido de revolución generado por la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$ con $0 \leq x \leq b$ para $b > 0$. ¿Existe el límite cuando $b \to \infty$ del volumen del sólido? ¿Qué significado geométrico tiene ese límite?

Ejercicio 12.

a) Determinar para qué valores de $c > 0$ el volumen de revolución generado por la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^c}$ entre $x = 1$ y $x = b$ es finito cuando $b \to \infty$.

b) Si ahora se considera el volumen entre $x = a$ y $x = 1$, ¿qué valores de c darían un volumen finito cuando $a \to 0^+$?

Ejercicio 13. Analizar si el área comprendida entre las gráficas de las funciones propuestas resulta finita. En caso de ser finita, calcular su valor exacto.

a) $g(x) = -x^{-6}$ y $f(x) = xe^{-x^2}$ para $x \in [1, +\infty)$

b) $g(x) = \dfrac{\pi}{2}$ y $f(x) = \arctan(x)$ para $x \in [0, +\infty)$

Ejercicio 14. Utilizando integrales, hallar la longitud de la curva $y = \sqrt{1 - x^2}$ en $[-1, 1]$. ¿Qué representa geométricamente?

Ejercicios adicionales

Ejercicio 15. Si f' es continua en $[a,b]$, aplicar integración por partes para demostrar que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\,\mathrm{sen}(\lambda t)dt = 0.$$

Ejercicio 16. Determinar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\int_1^{\infty} x^{\alpha}\ln(x)\,dx$ converge.

Ejercicio 17. Hay funciones que no tienden a cero en el infinito cuya integral impropia resulta convergente. Por ejemplo, probar que la siguiente integral resulta convergente:

$$\int_0^{\infty} \mathrm{sen}(x^2)\,dx.$$

Ejercicio 18. Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^{2/3}}\,dt$,

a) Demostrar que F es una función impar.

b) Analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, intervalos de concavidad, puntos extremos y de inflexión, si los tiene.

c) Estudiar si la función tiene asíntotas horizontales.

d) Esbozar la gráfica de F.