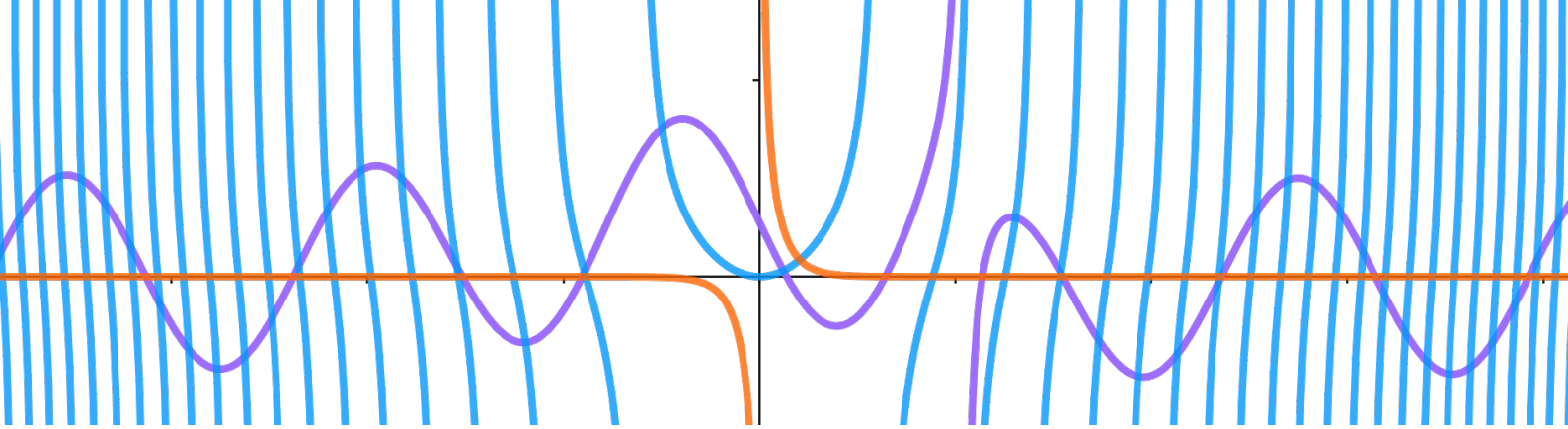


Práctica 12

Integrales impropias

1. Determinar si las siguientes integrales impropias convergen, utilizando la definición. De ser así, calcular a qué valor lo hacen.

   a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_1^{4} \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_1^{5} \frac{1}{5-x}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$

   e) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\,dx$

   f) $\displaystyle\int_1^{\infty} e^x\,dx$

2. Estudiar para qué valores de $s \in \mathbb{R}^+$ convergen las siguientes integrales impropias y para cuáles no:

   a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^s}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s}\,dx$

3. *a)* Demostrar que la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) dx$ es convergente.

   b) Explicar por qué dicha integral no es igual a $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx - \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x}\,dx$.

4. Analizar si las siguientes integrales son impropias. Determinar si convergen y, de ser así, calcular a qué valor lo hacen.

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\sqrt{e^x+1}\,dx$

   c) $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x}\ln(x)\,dx$

   d) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{2}{x^2-4x+3}\,dx$

5. Utilizando el criterio de comparación, determinar si las siguientes integrales impropias convergen.

   a) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx$

   b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(u)}{\sqrt[4]{u}}\,du$

   c) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{1-x}\,dx$

   d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-0{,}1}}\,dx$

e) $\displaystyle\int_{10}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x}\,dx$ *f)* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t-t^4}\,dt$

6. *a)* Mostrar que $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{1+x^2}\,dx$ es convergente.
   b) Mostrar que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\cos^2(x)\,dx$ es convergente.
   c) Mostrar que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{|\ln(x)|^n}{x}\,dx$ es divergente.
7. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx$
   b) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{-\ln(x)}\,dx$
   c) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{2x}e^{-x^2}\,dx$
   d) $\displaystyle\int_e^{\infty} \frac{t^2+1}{e^t+\ln(t)}\,dt$
   e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$
   f) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

8. Si f' es continua en $[a,b]$, aplicar integración por partes para demostrar que

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)\operatorname{sen}(\lambda t)dt = 0.$$

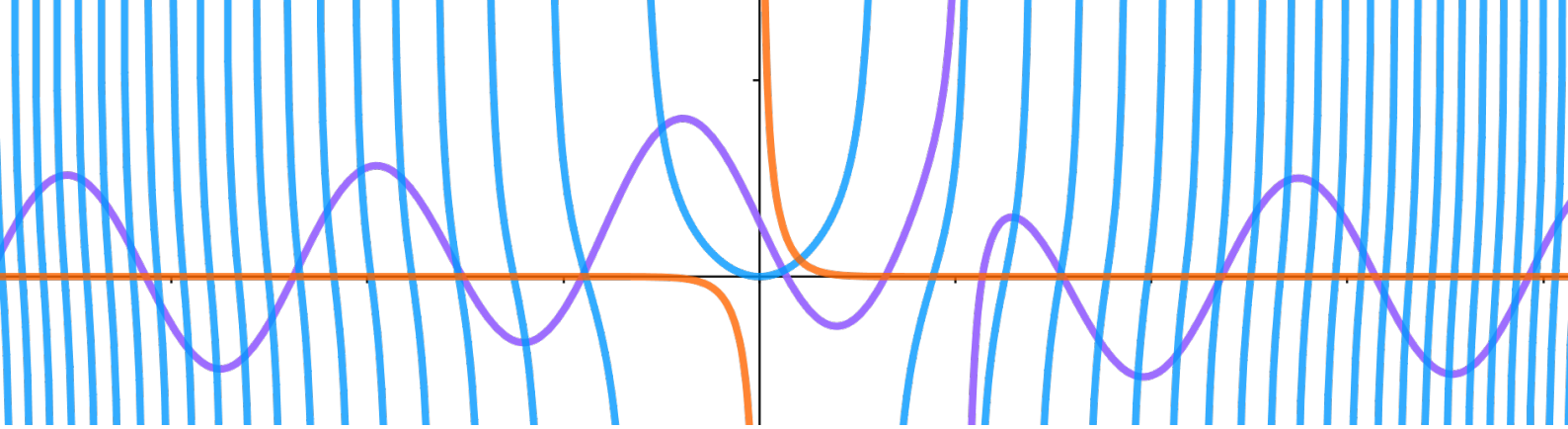
9. Determinar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $\displaystyle\int_0^y x^{\alpha}\ln(x+1)\,dx$ converge.
10. Hay funciones que no tienden a cero en el infinito cuya integral impropia resulta convergente. Por ejemplo, probar que la siguiente integral resulta convergente.

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

Teorema de Taylor e integrales.

11. Usando desarrollos de Taylor adecuados, determinar cuáles de las siguientes integrales impropias convergen.
   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^{3/2}}\,dx$
   b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^2}\,dx$
12. Calcular las siguientes integrales con error menor que 10^{-3}.

   a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)-1}{x}\,dx$
   b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$
   c) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$
   d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx$



CC +Mate - Prácticas 11 y 12

1. Sea f una función continua en el intervalo $[a,b)$ tal que $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Analizar la validez de la siguiente proposición:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ es convergente si y sólo si } \int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx \text{ es convergente.}$$

2. Probar que la integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^2}\,dx$ es convergente y calcular su valor.
3. Mostrar que la siguiente integral es convergente, pero no es absolutamente convergente.

$$\int_0^{\infty} \frac{sen(x)}{x}\,dx$$

4. Explique en qué consisten el método de los discos y de las arandelas para calcular volúmenes de sólidos de revolución.¿En qué casos conviene usar cada uno de ellos? Ejemplifique.
5. Calcular el volumen de sólido de revolución generado por la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}$ con $0 \le x \le b$ para $b > 0$. ¿Existe el límite cuando $b \to \infty$ del volumen del sólido? ¿Qué significado geométrico tiene ese límite?
6. *a*) Determinar para qué valores de $c > 0$ el volumen de revolución generado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^c}$ entre $x = 1$ y $x = b$ es finito cuando $b \to +\infty$.
   b) Si ahora se considera el volumen entre $x = a$ y $x = 1$, ¿qué valores de c darían un volumen finito cuando $a \to 0^+$?
7. Utilizando integrales, hallar la longitud de la curva $y = \sqrt{1-x^2}$ en $[-1,1]$. ¿Qué representa geométricamente?
8. **Volumen de un toro.** El disco $x^2 + y^2 \le a^2$se hace girar alrededor de la recta $x = b$ $(b > a)$ para generar un sólido con forma de dona, al cual se le denomina toro. Determine su volumen. (Sugerencia: $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \pi a^2/2$, ya que es el área de un semicírculo de radio a).
9. **La función gamma.** La función gamma de Euler, $\Gamma(x)$, utiliza una integral para ampliar la función factorial de los enteros no negativos a otros valores reales. Su expresión es

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt,\ x > 0.$$

   a) Demuestre que $\Gamma(1) = 1$.
   b) Aplique integración por partes para mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
   c) Deduzca que $\Gamma(n+1) = n!$, si n es un entero no negativo.

10. La velocidad de una partícula que se mueve hacia atrás y hacia delante a lo largo de una recta es $v = \dfrac{ds}{dt} = 5\,\mathrm{sen}(2t)\ m/seg$ para todo t. Si $s = 0$ cuando $t = 0$, encuentre el valor de s cuando $t = \pi/2\ seg$.
11. Una partícula se mueve con aceleración $a(t) = \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}$. Suponiendo que la velocidad es $v = 4/3$ y que la posición es $s = -4/15$ cuando $t = 0$, encuentre la velocidad v y la posición s en términos de t, para valores pequeños de t.