Álgebra lineal 2024

Trabajo práctico N°6 parte 2

Operadores nilpotentes. Subespacios cíclicos

1. ¿Se puede afirmar que un operador lineal que tiene como único autovalor al cero, es nilpotente?

2. Sea $N \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ tal que $N^2 = 0$. Probar que, o bien $N = 0$, o bien N es semejante a la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Sea V un $\mathbb{K}$-EV tal que $\dim(V) = n$ y $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$ es una base (ordenada) de V. Sea $T \in L(V)$ dado por
$$T(b_j) = \begin{cases} b_{j+1} & \text{si } j = 1, \cdots, n-1\,, \\ 0 & \text{si } j = n\,. \end{cases}$$
   a) Probar que el único autovalor de T es cero.
   b) Probar que T es nilpotente.
   c) ¿Cuánto vale la traza de T? ¿Y el determinante?

   Sugerencia: recordar el ejercicio optativo del TP 4.

4. Sea V un $\mathbb{K}$-EV tal que $\dim(V) = n$. Probar que si $N \in L(V)$ es nilpotente, entonces $p_N(x) = x^n$.

5. Considerar las transformaciones lineales $R_{\frac{\pi}{2}}$, S_Y, H_2 y P_X del ejercicio 10 de la práctica 2. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
   a) Probar que $Z(e_1, R_{\frac{\pi}{2}}) = \mathbb{R}^2 = Z(e_2, R_{\frac{\pi}{2}})$.
   b) Hallar $Z(e_1, S_Y)$ y $Z(e_2, S_Y)$.
   c) Probar que H_2 no tiene vectores cílicos.
   d) Hallar $Z(e_1, P_X)$ y $Z(e_2, P_X)$. ¿Puede dar algún vector cíclico de P_X?

6. Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ (fija) y $T \in L(\mathbb{K}^{n\times n})$ dado por
$$T(B) = A\,B - B\,A.$$
   Demostrar que si A es una matriz nilpotente de orden 2, entonces T es un operador nilpotente de orden 3.

7. Sea $T(x, y) = (x - y, x - y)$.
   a) Hallar el T-anulador de $(1, 1)$.
   b) Verificar que el polinomio minimal de T es divisible por el T-anulador de $(1, 1)$.
   c) ¿Tiene T un vector cíclico?

8. Sea $T \in L(\mathbb{R}^5)$ cuya representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^5$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Probar que T no tiene ningún vector cíclico.

b) Hallar el subespacio cíclico generado por $(1, 1, -1, -1, -1)$.