Álgebra lineal 2024

Trabajo práctico N°6 parte 1

Formas canónicas elementales II. Proyecciones y subespacios invariantes.

1. Sea A una matriz tal que $A^2 = A$ pero $A \neq I, 0$.

   a) Hallar el polinomio minimal de A.

   b) Probar que A es semejante a la matriz diagonal $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donde $r = \mathrm{Rg}(A)$.

2. Sea $T \in L(\mathbb{R}^4)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Probar que los únicos autovalores de T son 0 y 1, pero T no es una proyección.

   b) ¿Es diagonalizable T?

   c) Sea S un operador diagonalizable que tiene como únicos autovalores al 0 y al 1 ¿Se puede afirmar que S es una proyección?

3. Probar que los siguientes operadores son proyecciones:

   a) $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dado por $T(ax^2 + bx + c) = c$.

   b) $\mathrm{diag} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ dado por

$$(\mathrm{diag}(A))_{ij} = \begin{cases} A_{ii} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \text{para } i, j = 1, \cdots, n.$$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Probar que $A^3 = 5A^2 - 7A$ usando Cayley-Hamilton.

5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

   (la matriz del ejercicio 1 del TP 5) y supongamos que $A = [T]_{\mathcal{E}}$ para $T \in L(\mathbb{C}^3)$. Hallar tres subespacios no nulos de $\mathbb{C}^3$ que sean invariantes por T y tales que $\mathbb{C}^3$ se pueda escribir como suma directa de ellos.

6. *a*) Descomponer a $\mathbb{R}^3$ como suma de directa de subespacios W_1, W_2, W_3.

   b) Hallar las proyecciones P_1, P_2, P_3 correspondientes a cada uno de los subespacios del inciso *a*, respectivamente.

   c) Hallar el polinomio minimal y el característico de $\sqrt{2}P_1 + \pi P_2 + 3P_3$.

   d) ¿Es $\sqrt{2}P_1 + \pi P_2 + 3P_3$ un operador diagonalizable? Hallar sus autovalores y autoespacios correspondientes.

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

una representación matricial de $T \in L(\mathbb{C}^4)$ (pensando a $\mathbb{C}^4$ como $\mathbb{C}$-EV)

   a) Hallar el polinomio característico de T y el minimal. ¿Es T diagonalizable?

   b) Hallar dos subespacios de $\mathbb{C}^4$ que sean T-invariantes y tales que su suma directa sea $\mathbb{C}^4$.

8. Sea $T \in L(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{E}} = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) Probar que $W_1 = \overline{\{(1,0)\}}$ es T-invariante.

   b) Probar que no existe un subespacio W_2 de $\mathbb{R}^2$ que sea T-invariante y que además $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Si $T \in L(\mathbb{R}^2)$ es tal que $[T]_{\mathcal{E}} = A$ ¿existe algún subespacio propio de $\mathbb{R}^2$ que sea T-invariante?

   b) Si $S \in L(\mathbb{C}^2)$ (pensando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-EV), es tal que $[S]_{\mathcal{E}} = A$ ¿existe algún subespacio propio de $\mathbb{C}^2$ que sea S-invariante?

10. Sean V un $\mathbb{K}$-EV y $T, S \in L(V)$.

   a) Sea W un subespacio de V que es invariante por T y S. Probar que W también es invariante por los operadores $T + S$ y $T \circ S$.

   b) Supongamos que $S \circ T = T \circ S$. Probar que si λ es un autovalor de T, entonces el autoespacio asociado a λ es S-invariante.

11. Sea $T \in L(\mathbb{C}^3)$ dado por $T(x, y, z) = (3x, y, -y + 3z)$.

   a) Hallar los autovalores de T y los autoespacios asociados.

   b) Probar que existen proyecciones P_1, $P_2 \in L(\mathbb{C}^3)$ tales que $I = P_1 + P_2$ y $T = P_1 + 3P_2$. Hallar P_1 y P_2.