Álgebra lineal 2024

Trabajo práctico N°3

Transformaciones lineales II. Núcleo, imagen, inyectividad, suryectividad

1. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-EV y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos también que S_V y S_W son subespacios de V y W, respectivamente. Probar que $N(T)$, $T(S_V) := \{w \in W : w = T(v) \text{ para } v \in S_V\}$ y $T^{-1}(S_W) := \{v \in V : T(v) \in S_W\}$ son subespacios vectoriales de V y W según corresponda.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x + y, x + z)$.

   a) Probar que T es una transformación lineal.

   b) Hallar el núcleo de T ¿Qué dimensión tiene?

   c) Hallar la imagen de T ¿Qué dimensión tiene?

   d) Sea $C = \{(x, y) : x = 1\}$. Hallar $T^{-1}(C)$ ¿Es un subespacio? ¿Contradice esto el ejercicio anterior? ¿Por qué?

3. Para cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 8 de la práctica 2, determinar su núcleo e imagen. Además analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad.

4. Sea V un $\mathbb{K}$-EV y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que son equivalentes:

   a) $\mathrm{N}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

   b) Si $T(T(v)) = 0$ entonces $T(v) = 0$ para $v \in V$.

5. **Extensión de transformaciones lineales.** Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea U un subespacio propio de V. Probar que si $S : U \to W$ es una transformación lineal, entonces existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que,

$$Tu = Su \quad \forall u \in U\,.$$

6. Determinar en cada caso una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido.

   a) $(1, 1, 0) \in \mathrm{N}(T)$ y $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 1$.

   b) $\mathrm{N}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \overline{\{(1, 1, 2)\}}$.

   c) $\mathrm{N}(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$, $\mathrm{Im}(T) \neq \{(0, 0, 0)\}$ y $\mathrm{N}(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

7. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $\mathrm{Im}(T^2) = \mathrm{Im}(T)$. Probar que $\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{N}(T) = \{0\}$.

8. Sean V y W dos $\mathbb{K}$-EV. Supongamos que V es de dimensión finita y sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que:

   a) T es inyectiva si, y sólo si, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V)$.

   b) T es suryectiva si, y sólo si, $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(W)$.

   c) Supongamos que $\dim(V) = \dim(W)$. Luego, $N(T) = \{0\}$ si, y sólo si, T es suryectiva.

9. Sean $R_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $L_A : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$, dados por

$$R_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A \quad \text{y} \quad L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} ,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \\ -4 & -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

   a) Probar que $R_A \in L(\mathbb{R}^3)$ y $L_A \in L(\mathbb{R}^3)$.

   b) Hallar el núcleo y la imagen de R_A y L_A. Analizar, en ambos casos, inyectividad, suryectividad y biyectividad.

10. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión n y sea $S = \{v_1, \cdots, v_m\}$ un conjunto finito de vectores de V. Definimos $E : \mathbb{K}^m \to V$ como la transformación dada por

$$E(k_1, \cdots, k_m) = k_1\, v_1 + \cdots + k_m\, v_m \, .$$

   a) Probar que E es lineal.

   b) Probar que E es inyectiva si, y sólo si, S es un conjunto de vectores linealmente independientes.

   c) Probar que E es suryectiva si, y sólo si, S es un conjunto de vectores que generan V.

11. Considerar cada una de las transformaciones lineales del ejercicio 10 de la práctica 2.

   a) Hallar su representación matricial en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

   b) Determinar su núcleo e imagen y la dimensión de ambos. Verificar que la dimensión del núcleo más la de la imagen coincide con la dimensión del espacio de partida.

   c) Analizar inyectividad, suryectividad y biyectividad.