

Álgebra lineal 2024

(para Lic. en Astronomía)

Trabajo práctico N°2

Coordenadas, cambio de base, transformaciones lineales I

1. Sea $B = \{1 + x, 1 + x^2, x + x^2\}$.

- Probar que B es una base para $\mathbb{R}_2[x]$.
- Encontrar las coordenadas de $p(x) = 3x^2 + 2x - 1$ en la base B .
- Hallar las coordenadas de los elementos de B en la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$.
- Escribir a los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ como combinación lineal de los elementos de B .

2. Sean \mathcal{E} la base canónica de \mathbb{R}^3 y $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

- Hallar la matriz $P_{\mathcal{E},B}$ de cambio de base de B en \mathcal{E} .
- Hallar la matriz $P_{B,\mathcal{E}}$ de cambio de base de \mathcal{E} en B .
- Comprobar que la matriz hallada en el ítem $a)$ es la inversa de la del ítem $b)$.
- Comprobar que $P_{B,\mathcal{E}}[(1, 2, 0)]_{\mathcal{E}} = [(1, 2, 0)]_B$.

3. Sea $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n (como \mathbb{R} -EV) y sean

$$u_1 = e_2 - e_1, u_2 = e_3 - e_2, \dots, u_{n-1} = e_n - e_{n-1}, u_n = e_n.$$

- Probar que $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ es una base de \mathbb{R}^n .
- Hallar las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{E},B}$ y $P_{B,\mathcal{E}}$ para $n = 3$.
- Probar que para todo $v \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $[v]_B = P_{B,\mathcal{E}}[v]_{\mathcal{E}}$.

4. $a)$ Hallar una base de $\mathbb{C}_3[x]$ que no sea la canónica.

- Hallar la matriz de cambio de base de $B = \{1 - x, x - x^2, x^2 - x^3, x^3\}$ en la base hallada en el ítem anterior.
- ¿Cuáles son las coordenadas de $3x^3 - x + 2$ en la base B ?

5. Considerar los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$:

$$\begin{aligned} \blacksquare B_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}. \\ \blacksquare B_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

- Probar que B_1 y B_2 son bases para $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.
- Hallar la matriz de cambio de base de B_2 en la base B_1 .
- ¿Cuáles son las coordenadas de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ en la base B_2 ? ¿Y en la base B_1 ?

6. Hallar las matrices de cambio de base P_{B_1, B_2} y P_{B_2, B_1} para cada uno de los siguientes casos.

a) En \mathbb{R}^3 , $B_1 = \{(5, 3, 1), (1, -3, -2), (1, 2, 1)\}$ y $B_2 = \{(-2, 1, 0), (-1, -3, 0), (-2, -3, 1)\}$.

b) En $\mathbb{C}_3[x]$, $B_1 = \{1, x - 1, x^2 - x, x^3\}$ y $B_2 = \{x, x - 1, x^2, x^3 + 1\}$.

7. Sea $B_1 = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ una base de \mathbb{R}^3 . Si

$$P_{B_2, B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar los vectores de la base B_2 .

8. Determinar si las siguientes aplicaciones son transformaciones lineales.

a) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (x - y, x^2, 2z)$.

b) $T : \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 1}$ dada por $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - 3y \\ 3y - 2z \\ 2z \end{pmatrix}$.

c) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0)$.

d) $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $T(z) = \bar{z}$.

e) La función traza $\text{tr} : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

f) La función determinante $\det : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}$.

Sugerencia: Considerar primero el caso $n = 2$.

9. Sobre la homogeneidad y aditividad de las transformaciones lineales.

a) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R},$$

pero que f no sea lineal.

b) Dar un ejemplo de una función $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \quad \forall u, v \in \mathbb{C},$$

pero que g no sea lineal.

10. a) Sea $R_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función que define la rotación en un ángulo α (fijo) en sentido antihorario, es decir

$$R_\alpha(x, y) = (x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha), x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha)) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Probar que R_α es una transformación lineal para cualquier valor del ángulo α fijo.

2) Determinar la imagen por $R_{\frac{\pi}{2}}$ de $P = (0, 3)$, $Q = (3, 1)$ y $S = (1, -1)$. Graficar el triángulo PQS y su transformado en el mismo sistema de coordenadas.

b) Sea $S_Y : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función simetría respecto del eje y , es decir

$$S_Y(x, y) = (-x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Probar que S_Y es una transformación lineal.
- 2) Determinar la imagen por S_Y de $A = (0, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (4, 3)$ y $D(2, 0)$. Graficar el rectángulo $ABCD$ y su transformado en el mismo sistema de coordenadas.

c) Sea $H_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función homotecia de razón $k \in \mathbb{R}$ (fijo), es decir

$$H_k(x, y) = (kx, ky) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Probar que H_k es una transformación lineal para cualquier valor de $k \in \mathbb{R}$ fijo.
- 2) Determinar la imagen por H_2 de $A = (0, -1)$, $B = (1, 2)$ y $C = (3, 1)$. Graficar el triángulo ABC y su transformado en el mismo sistema de coordenadas.

d) Sea $P_X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función proyección sobre el eje x .

- 1) Hallar una expresión analítica para P_X y probar que es una transformación lineal.
- 2) Determinar la imagen por P_X de $A = (0, 1)$, $B = (2, 4)$, $C = (4, 3)$ y $D(2, 0)$. Graficar el rectángulo $ABCD$ y su transformado, en el mismo sistema de coordenadas.

11. Se dice que una transformación $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una isometría si preserva distancias, es decir

$$\text{dist}(P, Q) = \text{dist}(T(P), T(Q)) \quad \forall P, Q \in \mathbb{R}^n.$$

Analizar cuáles de las transformaciones del ejercicio anterior, son isometrías.

12. a) Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (-5, 3)$ y $T(-1, 1) = (5, 2)$. Determinar $T(5, 3)$ y $T(-1, 2)$.
- b) Determinar si existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 1) = (2, 6)$, $T(-1, 1) = (2, 5)$ y $T(2, 7) = (5, 3)$.