Álgebra lineal 2024

(para Lic. en Astronomía)

Trabajo práctico N°1

Espacios vectoriales, independencia lineal, bases

1. Analizar si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-EV) con las operaciones $+$ y $\cdot$ usuales.

   a) Los puntos de una recta de $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen de coordenadas.

   b) Los polinomios de grado menor o igual a 3, que tienen el mismo término independiente.

   c) Las matrices de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ cuya diagonal principal es nula.

2. Sea $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{3\times 3} : A \quad \text{es inversible}\}$. ¿Es $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$ un $\mathbb{C}$-EV con la suma dada por $A + B = AB$ y el producto por un escalar usual?

3. Determinar si existe $t \in \mathbb{R}$ tal que los vectores $(t-1,\ 0,\ 1)$, $(t,\ 1,\ 2)$ y $(-1,\ 1,\ -1)$ sean linealmente independientes.

4. Demostrar que en un espacio vectorial de dimensión n, todo conjunto de $n+1$ vectores es linealmente dependiente.

5. *a*) Sean $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$ y $b \in \mathbb{R}^p$. ¿Qué condición debe cumplir b para que el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^q : Ax = b\}$ sea un subespacio de $\mathbb{R}^q$?

   b) Determinen cuales de los siguientes conjuntos son subespacios de los espacios que se indican.

      1) $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - x_1 = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.
      2) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = x_2 = ... = x_r = 0\}$ de $\mathbb{R}^n$ con $r < n$.
      3) $S_3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0,\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 1\}$ de $\mathbb{R}^4$.
      4) $S_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : ad - bc = 0\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.
      5) $S_5 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$

6. Sea S el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $B = \{(-1,0,-1,1);\ (0,1,0,-1);\ (-1,1,-1,0)\}$. ¿Es B una base de S? Hallar una base de S y extenderla a una de $\mathbb{R}^4$.

7. Probar que $B = \{(1,-1,-1,-1);\ (0,1,1,0);\ (1,2,0,0);\ (0,1,2,-1)\}$ es una base de $\mathbb{C}^4$ (como $\mathbb{C}$-EV).

8. Hallar una base para $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-EV y como $\mathbb{C}$-EV. ¿Qué dimensión tiene $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-EV? ¿y como $\mathbb{C}$-EV?

9. Analizar en cada caso si el conjunto es linealmente independiente y hallar el subespacio generado por cada uno ellos. Decir además qué dimensión tiene cada subespacio.

   a) $B = \{(2,0,1);\ (3,1,2),\ (1,1,1)\,,(7,3,5)\} \subset \mathbb{R}^3$.

b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

c) $B = \{1 - x,\, 2 - x^2,\, x + x^2\} \subset \mathbb{R}_2[x]$ (el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 con coeficientes en $\mathbb{R}$).

10. Sea V un $\mathbb{K}$-EV de dimensión finita y U un subespacio de V. Probar que, si la dimensión de U coincide con la de V entonces $U = V$.

11. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V ¿Son $W_1 \cap W_2$ y $W_1 \cup W_2$ subespacios de V? Justificar.

12. Probar que $W_1 + W_2 = \overline{W_1 \cup W_2}$ y, por lo tanto, $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

13. Sean $V_1 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \, a_{11} + a_{12} = 0\}$ y $V_2 = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} : \, a_{11} + a_{21} = 0\}$.

    a) Probar que V_1 y V_2 son subespacios de $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (como $\mathbb{C}$-EV).

    b) Hallar $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$.

    c) Hallar las dimensiones de V_1, V_2, $V_1 \cap V_2$ y $V_1 + V_2$.

14. Sea $S = \{(x, y, z) : \, x - y + z = 0\}$.

    a) Probar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base para S.

    b) Hallar un subespacio T de $\mathbb{R}^3$ tal que $S + T = \mathbb{R}^3$ ¿Es único?

15. Hallar una base de $V_1 + V_2 + V_3$ para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^5$.

    a) $V_1 = \overline{(1, 1, 2, 0, 1);\, (2, 0, 3, 0, 1)}$, $V_2 = \overline{(-1, 1, -2, 1, 1)}$ y $V_3 = \overline{(0, 1, 0, 1, 1)}$.

    b) $V_1 = \overline{(1, 1, 2, 0, 1);\, (2, 0, 3, 0, 1)}$, $V_2 = \overline{(1, 0, -2, 1, 1)}$ y $V_3 = \overline{(1, 1, 1, 2, 2)}$.

16. Sea $C(\mathbb{R})$ el $\mathbb{R}$-EV de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, con las operaciones usuales. Si $V \subset C(\mathbb{R})$ es el conjunto de funciones pares y $W \subset C(\mathbb{R})$ el de las impares, probar que:

    a) V y W son subespacios de $C(\mathbb{R})$.

    b) $V \cap W = \{0\}$.

    c) $V + W = C(\mathbb{R})$.

17. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V tales que, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ y $V = W_1 + W_2$. Probar que, dado $v \in V$, existen únicos $w_1 \in W_1$ y $w_2 \in W_2$ tales que $v = w_1 + w_2$.

18. Probar que si W_1 y W_2 son subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita V, entonces
$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2).$$