Guía de trabajos prácticos 1: Lógica

Escribir en el lenguaje simbólico – Tablas de verdad

El propósito de los siguientes ejercicios es familiarizarnos con la notación simbólica del cálculo proposicional y con el uso de esquemas y cuantificadores. Además, es importante que ejerciten con tablas de verdad para poder establecer el valor de verdad de proposiciones compuestas a partir del valor de las proposiciones atómicas que las integran.

Repaso de la teoría

Ejercicio 1. Ir a los apuntes que tomó de la teoría (o a un libro o apunte de cátedra) y

- Copiar la definición de proposición.
- ¿ A qué llamamos "valor de verdad" de una proposición?
- Copiar las definiciones de "necesario" y "suficiente" en el contexto de un condicional.
- Copiar las tablas de verdad de la conjunción, la disyunción y el condicional.

Ejercicio 2. Escribir las siguientes proposiciones en lenguaje simbólico. Indicar su valor de verdad

a) 8 es par y 6 es impar

b) 8 es par o 6 es impar

c) 4 es par y 2 no divide a 5.

d) Si 8 es par y 6 impar, o bien 4 es par o 2 divide a 8.

e) 10 es múltiplo de 5 pero no de 3.

Ejercicio 3. Dadas la siguientes proposiciones, reescribirlas utilizando "necesario" y "suficiente".

a) Si un número es múltiplo de 3 entonces su cuadrado es múltiplo de 9.

b) Un número es múltiplo de 4 sólo si es divisible por 2.

c) Un número es múltiplo de 7 si es múltiplo de 21.

Ejercicio 4. Construir las tablas de verdad de las siguientes fórmulas y clasificarlas en tautologías ,contradicciones y contingencias

a) $\sim p \to (q \vee \sim p)$

b) $((p \wedge q) \to p) \to q$

c) $(\sim p \to q) \to (\sim q \to p)$

d) $((p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q)) \leftrightarrow ((\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim q))$.

Implicaciones y leyes de equivalencia

Es importante incorporar varias de las equivalencias e implicaciones lógicas que veremos a continuación. Son de utilidad para simplificar y operar de forma más efectiva con proposiciones y esquemas proposicionales más complejos. Es fundamental que incorporen equivalencias lógicas para la negación de una implicación o condicional $p \to q$ *y para esquemas con cuantificadores.*

Repaso de la teoría

Ejercicio 5.

- Repasar de la teoría el significado de “equivalencia lógica” entre proposiciones.
- Copiar la definición de tautología, contradicción y contingencia.
- Establezca la diferencia entre una equivalencia y una implicación lógica.

Las siguientes son algunas equivalencias lógicas:

1. **Doble negación:** $p \Longleftrightarrow \sim\sim p$
2. **Leyes conmutativas:** $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p$ y $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$
3. **Leyes asociativas:** $(p \vee q) \vee r \Longleftrightarrow p \vee (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \wedge r \Longleftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
4. **Leyes distributivas:** $(p \vee q) \wedge r \Longleftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ y $(p \wedge q) \vee r \Longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. **Leyes de De Morgan:** $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow \sim p \wedge \sim q$ y $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow \sim p \vee \sim q$
6. **Ley de implicación:** $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim p \vee q$

Ejercicio 6. Probar la equivalencia 5, mostrando que las proposiciones que se obtienen reemplazando $\Longleftrightarrow$ por $\leftrightarrow$ son tautologías.

Ejercicio 7. Deducir la equivalencia de la implicación con el contrarrecíproco: $p \rightarrow q \Longleftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$.

Las siguientes son algunas implicaciones lógicas:

1. **Adición:** $p \implies (p \vee q)$
2. **Simplificación:** $(p \wedge q) \implies p$
3. **Modus Ponens:** $p \wedge (p \rightarrow q) \implies q$
4. **Modus Tolens:** $(p \vee q) \wedge \sim p \implies q$
5. **Silogismo hipotético:** $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \implies p \rightarrow r$.

Ejercicio 8. Probar las implicaciones 3 y 5, mostrando que las proposiciones que se obtienen reemplazando $\implies$ por $\rightarrow$ son tautologías.

Esquemas lógicos – Cuantificadores

Ejercicio 9. Simbolizar utilizando esquemas, cuantificadores y conectivos lógicos:

a) Todos los números son enteros.

b) Existen números impares o no todos los números son pares.

c) Para todo par de números reales, si su producto es uno entonces uno es el inverso del otro.

d) Dado dos números reales, existe un número real mayor a la suma de ambos.

Ejercicio 10. Escribir en el lenguaje corriente las siguientes proposiciones, siendo el universo el conjunto de números reales y los esquemas definidos como sigue:

$p(x)$: x es par

$q(x): x$ es divisible por 2

$r(x): x > 0$

$p(x,y): y > x$

$q(x,y): x + y = 0$

a) $(\forall x)(p(x) \to q(x))$

b) $(\exists y)(\forall x) p(x,y)$

c) $(\forall x)(\exists y) p(y, x+3)$

d) $(\forall x)\Big(r(x) \to (\exists y)(\sim r(y) \wedge q(x,y))\Big)$

Negación de cuantificadores y condicionales

Teniendo en cuenta las equivalencias:

$$\sim (\forall x) p(x) \Longleftrightarrow (\exists x)(\sim p(x)) \quad \text{y} \quad \sim (\exists x) p(x) \Longleftrightarrow (\forall x)(\sim p(x))$$

Ejercicio 11. Encontrar expresiones equivalentes para la negación de los esquemas del ejercicio 5

Ejercicio 12. A partir de la leyes de equivalencia, probar la siguiente equivalencia para la negación de una implicación: $\sim (p \to q) \Longleftrightarrow p \wedge \sim q$

Ejercicio 13. Definir universo y esquemas para simbolizar la siguiente proposición:

Para todo par de números reales, si su suma es 16 y su producto es 9, entonces uno de ellos es 5

Negar la proposición anterior en forma simbólica y traducirla al lenguaje coloquial.

Actividad adicional: Reglas de inferencia y razonamientos válidos

Una aplicación directa de lo visto anteriormente es poder verificar si un razonamiento dado es válido desde el punto de vista formal. En matemática, es usual presentar los resultados (teoremas, proposiciones, corolarios, etc.) como una implicación (partiendo de ciertos enunciados que damos como válidos se enuncia una conclusión) que se prueba mediante un procedimiento deductivo: utilizando las premisas válidas del enunciado, deducimos la tesis o conclusión. Es importante poder chequear que los pasos lógicos de ese procedimiento deductivo sean correctos.

Dado un grupo de proposiciones $H_1, H_2, \dots H_k$ que llamamos **hipótesis** o **premisas** y una proposición C que llamamos conclusión, decimos que la inferencia $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_k \implies C$ es válida si tenemos que $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_k \to C$ es una tautología.

A una inferencia que es válida se la denomina *teorema*. Un razonamiento inválido es una *falacia*.

Notación: notaremos $H_1, H_2, \dots H_k / C$ a un razonamiento en donde las hipótesis son $H_1, H_2, \dots, H_k$ y la conclusión es la proposición C.

Por ejemplo, de las implicaciones lógicas, tenemos la regla de inferencia de Modus Ponens: $p, p \to q \,/\, q$.

Las equivalencias e implicaciones lógicas y las reglas de inferencia nos permiten verificar la validez de un razonamiento sin necesidad de hacer tablas de verdad muy grandes para verficar si es tautología o no la implicación.

Ejemplo 1: Si queremos verificar la veracidad del razonamiento: $(l \wedge p) \to (\sim m), (l \wedge m) \,/\, (\sim p)$, podemos listar las premisas e ir agregando las que vamos obteniendo por equivalencias o por inferencias lógicas, hasta llegar a la conclusión:

1. $(l \wedge p) \rightarrow (\sim m)$ (Premisa)
2. $(l \wedge m)$ (Premisa)
3. m (simplificación en 2.)
4. $\sim (l \wedge p) \vee (\sim m)$ (Ley de implicación en 1.).
5. $(\sim (\sim m))$ (equivalencia de la doble negación en 3.).
6. $(\sim (l \wedge p))$ (Modus Tollens 4. y 5.).
7. $((\sim l) \vee (\sim p))$ (equivalencia (De Morgan) en 5.)
8. $(l \rightarrow (\sim p))$ (equivalencia del condicional en 6.)
9. l (simplificación en 2.)
10. $(\sim p)$ (Modus Ponens en 8. y 7.)

Desde ya que no hay una única forma de ir realizando estos pasos!

Ejemplo 2: Si ahora tenemos el razonamiento: $\sim p \rightarrow (q \wedge r), q \wedge p \ / \ \sim r$, podemos verificar que $(\sim p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge (q \wedge p) \rightarrow \sim r$ no es una tautología, simplemente tomando como valor de verdad V para p, q y r. Por lo que el razonamiento es una falacia.

Ejercicio 14. Verificar si los siguientes razonamientos son teoremas o falacias:

a) $(\sim p) \rightarrow (q \wedge r),\ q \wedge r \ / \ \sim r$

b) $p \rightarrow \sim q,\ (\sim r) \rightarrow p,\ q \ / \ r$

Ejercicio 15. Escribir simbólicamente las premisas y conclusión del siguiente razonamiento y analizar su validez:

"Si voy a cursar, no puedo mirar la tele. Miro la tele o apruebo el examen. Fui a cursar, por lo tanto, aprobé el examen."