Práctica 0: Un breve repaso de temas varios

Gran parte del contenido que veremos en álgebra durante el año depende de un buen manejo artimético en las operaciones con los diferentes conjuntos numéricos. También necesitamos tener una idea de las nociones básicas de la representación cartesiana para trabajar con los números complejos.

El propósito de esta guía es hacer un breve repaso de estos temas:

Operaciones con números y expresiones algebraicas

A lo largo de la materia, trabajaremos con conjuntos numéricos: los Naturales, los números Enteros, Reales, etc. Es fundamental saber operar correctamente para no cometer errores "de cuentas" al resolver algunos ejercicios.

Seguidamente, vamos a repasar qué propiedades tienen las dos operaciones fundamentales en los números reales: la suma y el producto. Muchas de ellas (no todas) se heredan en subconjuntos numéricos de los reales, como los naturales, los enteros, racionales, etc. También veremos en la materia cuáles se mantienen en el conjunto de números complejos.

Las operaciones suma y producto en los números Reales cumplen ciertas propiedades. En principio, ambas son **cerradas**, esto es, si sumo dos números reales obtengo un número real. También si multiplicamos dos números reales el resultado es un número real. Pero además:

- ✓ Ambas son operaciones **asociativas**. Esto quiere decir que no importa cómo agrupemos los términos en una suma o producto:

$$(2+3)+5=2+(3+5)=10 \qquad \text{y} \qquad (2\cdot 3)\cdot 5=2\cdot(3\cdot 5)=30 \qquad \text{para dar un ejemplo.}$$

- ✓ Ambas son operaciones **conmutativas**. Esto nos dice que el orden de los factores no altera el resultado:

$$2\cdot 3=3\cdot 2=6 \qquad \text{y} \qquad 2+3=3+2=5 \qquad \text{por ejemplo.}$$

- ✓ Ambas tienen **elemento neutro**: El 0 para la suma y el 1 para el producto. Son elementos que no alteran el resultado cuando operamos con ellos.

- ✓ Cada número tiene su **opuesto** para la suma: $\sqrt{2}$ tiene como opuesto a $-\sqrt{2}$, $-\frac{3}{2}$ tiene como opuesto a $\frac{3}{2}$, etc. En los números reales (y lo mismo sucede con los racionales y los complejos), cada número distinto del 0 tiene su **inverso** para el producto: 0,5 es el inverso de 2, $\frac{-1}{\pi}$ el inverso de $-\pi$, etc. Al inverso de un número $a \neq 0$ lo escribimos como a^{-1} o $\frac{1}{a}$.

  ¡Ojo!, recordemos que en los números **enteros** esto no es cierto. Por ejemplo, no hay un entero z que haga que $z\cdot 2=1$.

- ✓ El producto se **distribuye** en la suma:

$$3\cdot(2+5)=3\cdot 2+3\cdot 5 \qquad y \qquad (2+5)\cdot 3=2\cdot 3+5\cdot 3, \text{ por ejemplo,}$$

> Noten que la propiedad distributiva del producto en la suma es la que nos permite "sacar factor común" en una expresión numérica o algebraica. En general, cada vez que tengamos que simplificar una expresión numérica o algebraica, estaremos aplicando estas propiedades: al agrupar términos similares, al sacar factor común, al reordenar los términos, etc.

Ejercicio 1. Reescribir las siguientes expresiones:

1. $2ab+4a-3b-6$. (Rta: puede escribirse como $(b+2)(2a-3)$)
2. $5\cdot(4a-5ab)-14a-3\cdot(2a)-25ba$. (Rta: $-50ab$)
3. $-(-3x)+5(2-3\cdot(4-3)(2x+1))$. (Rta: $-27x-5$)

Fracciones

Repasemos cómo operar con fracciones. Una número racional x puede representarse con la notación $x = \frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, b es distinto de 0 y se llaman **numerador** y **denominador** respectivamente.

El secreto para recordar cómo sumar y multiplicar con fracciones es:

- ⋆ Para multiplicar $\frac{a}{b}$ con $\frac{c}{d}$, pensar que podemos reescribir: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$ ("a dividido b es a por el inverso de b"). De igual forma, $\frac{c}{d} = c \cdot d^{-1}$. Por lo tanto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \left(a \cdot b^{-1}\right) \cdot \left(c \cdot d^{-1}\right) = (a \cdot c) \cdot \left(b^{-1} \cdot d^{-1}\right) = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d)^{-1} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

  Notar que utilizamos la asociatividad y la conmutatividad del producto. Además, necesitamos usar el hecho de que el inverso de $b \cdot d$ es $d^{-1} \cdot b^{-1}$ (eso se comprueba en un segundo!)

  De modo que la regla es sencilla: simplemente multiplicamos los numeradores y denominadores entre si.

- ⋆ Para sumar $\frac{a}{b}$ con $\frac{c}{d}$, debemos recordar el concepto de "fracciones equivalentes". Básicamente, como $1 = \frac{x}{x}$ para cualquier $x \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{x} = \frac{ax}{bx}$.

  El truco es entonces multiplicar numerador y denominador por alguna constante adecuada, de modo de poder sacar factor común al denominador:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = (ad)(bd)^{-1} + (cb)(bd)^{-1} = (ad + cb)\,(bd)^{-1} = \frac{ad + cb}{bd}$$

  ¿Se ve cómo se utilizó la propiedad distributiva?

  Asi que como regla a recordar: al sumar fracciones cambiamos las fracciones por fracciones equivalentes multiplicando numerador y denominador por el denominador de la otra fracción para "unificar denominadores" una vez hecho esto, tenemos un denominador común y sumamos tranquilos los numeradores.

Ejercicio 2. Realizar los siguientes cálculos:

a. $\frac{2}{5} - \frac{2}{7}$

b. $\frac{6}{4}\left(\frac{2}{5} + 7\right)$

c. $\frac{a}{2b} + \frac{b}{2a}$

d. $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Potenciación y sus propiedades

El hecho de que el producto sea asociativo nos permite definir la potenciación con n **natural**:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

a es la **base** y n el **exponente**.

Se define, además, para $a \neq 0$, $a^0 = 1$.

Si $a \neq 0$, y notamos por a^{-1} al inverso multiplicativo de a, podemos definir la potencia de exponente negativo:

$$a^{-n} = (a^{-1})^n, \qquad \text{con } n \geq 1$$

Las mismas propiedades del producto nos permiten deducir las siguientes para la potenciación:

- ⋆ Producto de potencias de igual base: dejamos la misma base y sumamos los exponentes.

  Ejemplo: $2^4 \cdot 2^7 = 2^{4+7} = 2^{11}$.

- ⋆ Producto de potencias con igual exponente. Multiplicamos las bases y dejamos el mismo exponente.

  Ejempo: $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$.

- ⋆ Potencia de una potencia: En ese caso, la base es la misma, pero multiplicamos los exponentes. Por ejemplo: $(2^3)^{-2} = 2^{3\cdot(-2)} = 2^{-6}$.

Todas se deducen a partir de la definición de potencia. Por ejemplo:

$$2^{11} = \underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{11\text{veces}} = (\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{4\text{veces}})\cdot(\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{7\text{veces}}) = 2^4\cdot 2^7$$

por la asociatividad del producto.

Ejercicio 3. Sean a, b dos números cualesquiera, distintos de 0. Deducir de las propiedades que vimos recién, las siguientes:

i. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$ (Aquí conviene tener en cuenta que $\frac{1}{b} = b^{-1}$, el inverso de b).

ii. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Ejercicio 4. Simplificar las siguientes expresiones

1. $t^2\cdot t^{-5}$
2. $\frac{8x^5}{4x^{-2}}$
3. $\left(\frac{r^3}{r^8}\right)^2$
4. $-13^0 + (-13)^0$
5. $\left(\frac{3m^2n^7}{m}\right)^5$
6. $2x^3 + 7x^3$

Importante!

La potencia no se distribuye en la suma, es decir, si tenemos dos números a y b, $(a+b)^n \neq a^n + b^n$ en general.

Veremos en la materia una expresión para la **potencia n-ésima de un binomio**, pero seguramente recuerden de memoria que “el cuadrado de una suma es el cuadrado del primer término mas el cuadrado del segundo mas el doble del producto de ambos términos”: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Si no lo han hecho aún, demuestren esa fórmula del cuadrado de un binomio con las propiedades que repasamos de las operaciones suma y producto.

Radicación - Propiedades de la radicación

Teniendo en cuenta que, siempre que esto sea posible en los reales, la radicación puede expresarse como una potencia de exponente fraccionario: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, las propiedades de la radicacón terminan siendo análogas a la de la potenciación:
Por ejemplo, $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}) = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$
Traten de escribir cómo quedarían las propiedades “sacar raíz de una raíz” y la distributividad respecto a la división.
Es muy importante recordar que la raíz tampoco se distribuye en la suma!

Ecuaciones

La manipulación de expresiones numéricas y algebraicas que repasamos en la sección anterior es útil cuando queremos **resolver una ecuación**.

Recordemos que en una ecuación tenemos una igualdad de dos expresiones en las cuales aparecen mezclados términos numéricos con **incógnitas**:

$$2x+3=-7x+4 \qquad \text{ó} \qquad 2ab+a^2+2b^2=100 \text{ por ejemplo}$$

Resolver la ecuación es, si es posible, hallar el o los valores que debe tomar la o las incógnita(s) para que la identidad sea válida.

Si pensamos en cómo trabajmos una ecuación para resolverla, veremos que los pasos a seguir apuntan a "despejar" la incógnita (o tratar de escribir una expresión más sencilla, si hay varias incógnitas). Para ello, pasamos de una ecuación a otra "equivalente" (con las mismas soluciones) pero más simple. ¿Cómo hacemos esto? aplicando las mismas operaciones a ambos lados de la igualdad:

Veamos un ejemplo bien sencillo:

Si queremos resolver $2x+3=10$, podemos empezar por sumar (-3) a ambos lados:

$$2x+3+(-3)=10+(-3) \quad \text{ es decir, } \quad 2x=7$$

Esto es "pasamos el 3 restando" como decimos usualmente.

Este procedimiento de hacer a ambos lados de la igualdad la misma operación nos garantiza que la ecuación inicial tiene, en principio, las mismas soluciones que $2x=7$ que es más sencilla. El siguiente paso, para despejar x es multiplicar por 2^{-1} a ambos lados de la igualdad, para obtener

$$2^{-1}\cdot 2x=2^{-1}\cdot 7 \quad \text{ que se convierte en } \quad x=\frac{7}{2}$$

Aquí, "pasamos dividiendo el 2". Es claro que esa última ecuación tiene como única solución $x=\frac{7}{2}$, ¿no?

No haremos un desarrollo detallado de cómo clasificamos ciertas ecuaciones en **lineales, cuadráticas, fraccionarias, etc.** porque no es el propósito de esta práctica. Simplemente recordemos que el procedimiento previo nos sirve para hallar, si existe, la solución a una ecuación lineal en x.

También es útil repasar el método que aprendimos en el cole para resolver ecuaciones cuadráticas: aplicando la fórmula de Bhaskara o completando cuadrados. Lo interesante en las ecuaciones cuadráticas o de segundo orden es que disponemos de una manera de saber "a priori" (es decir, antes de intentar resolverla) si tiene solución o no:

Dada la ecuación $ax^2+bx+c=0$, esta tiene solución (en los números reales) cuando el **discriminante** $D=b^2-4ac$ es mayor o igual a 0.

Más aún, tiene solución única si $D=0$ y exactamente dos soluciones si $D>0$.

Recordemos la completación de cuadrados y la fórmula de Bhaskara:

Completar cuadrados y Bhaskara

Dada la ecuación general de orden 2: $ax^2+bx+c=0$, la podemos reescribir, "completando cuadrados" como:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=0$$

Sumando y restando $\frac{b^2}{4a}$ y operando aritméticamente (Ejercicio!)
De esta nueva ecuación se desprende que si $D\geq 0$, las soluciones son

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

En general, ante una ecuación cualquiera, podemos intentar "factorizarla" lo más que podamos, sacando factores en común, simplificando, etc. En síntesis aplicar las herramientas que nos da la aritmética para poder llevarla, en lo posible, a una ecuación equivalente más sencilla.

Ejercicio 5. Resolver las siguientes ecuaciones lineales:

a. $3(2-x)-1=-x+\frac{5}{2}(1-x)+\frac{x+3}{2}$ b. $x+3-\frac{2}{3}(x-1)=\frac{1}{3}(x+5)+2$ c. $\frac{1}{3}\left(2x-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}-\frac{3x}{2}$

d. $\frac{4x-3}{-2}+\frac{x}{5}-2=\frac{3(x-2)}{2}$ e. $\frac{x-1}{2}-\frac{2x+\frac{1}{2}}{5}=x-\frac{3}{5}x$ f. $|3x-5|=x+3$ ($|a|=a$ si $a\geq 0$ y $|a|=-a$ si $a<0$)

g. Verificar, para cada valor de a si la ecuación tiene solución y hallarla: $2x-1=a(x+1)$

Ejercicio 6. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas. Aplicar la completación de cuadrados para alguna de ellas.

a. $x^2-16x+39=0$ b. $(x-2)(x+2)=3x$ c. $x^2+x+1=0$ d. $\frac{-3}{4}x+x^2=0$

e. $x\left(-3x-\frac{1}{3}\right)=x\left(2x+\frac{1}{2}\right)$ f. $\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{16}=0$ g. $\frac{5}{4}x^2-3x+1=\frac{4x-10}{2}$ h. $-(x+4)(x-2)=1$

En una ecuación fraccionaria, la o las incógnitas pueden aparecer tanto en el numerador como en el denominador. Aquí conviene llevar la expresión (si es posible), mediante operaciones aritméticas con fracciones, a una única fracción igualada a 0. En ese caso, para resolver la ecuación simplemente igualamos a 0 el numerador, pues una fracción $\frac{a}{b}=0$ si y solamente si $a=0$.

¡Pero cuidado! tenemos que verificar que la solución propuesta no anule el denominador, pues **no se puede dividir por 0**.

Ejemplo: Si tenemos la ecuación:

$$\frac{x^2-1}{x+1}=0$$

Al igualar el numerador a 0 tenemos $x=1$ y $x=-1$ como candidatas a solución de la ecuación fraccionaria, pero es claro que descartamos $x=-1$ ya que **anula al denominador**.

Ejercicio 7. Resolver las siguientes ecuaciones fraccionarias.

a. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{3}{2}$ b. $\frac{x}{x-1}+\frac{1}{x}=1$ c. $\frac{1}{x-1}+x=\frac{x^2+1}{x}$

d. $\frac{2x+1}{x+3}=\frac{\frac{1}{2}}{x}$ e. $\left(\frac{1}{x}\right)^2+\frac{x-1}{4x}=1$ f. $\frac{1}{\frac{5}{2x+1}+\frac{1}{x+2}}=\frac{1}{2}$

Cuando agrupamos varias ecuaciones obtenemos un **sistema de ecuaciones**. Una solución debe satisfacer todas las igualdades del sistema en simultáneo. El caso más sencillo a considerar es el de los sistemas de ecuaciones **lineales**. En la materia los estudiaremos en detalle, analizando si podemos establecer, a priori, si tienen solución o no (y cuántas!). Por ahora, traten de resolver los siguientes sistemas

Ejercicio 8. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a. $\begin{cases} 2x-2y & =-1 \\ \frac{3}{2}x+4y & =0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+y & =1 \\ y-z & =1 \\ 2z-x=1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x+2z & =2 \\ -x+y & =1 \\ 3x+2y-2z & =0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} \frac{x+2y}{4} & =\frac{x}{2} \\ x-\frac{5}{2}y & =\frac{2}{5}(3-x) \end{cases}$

Representación en el plano cartesiano

Cuando queremos identificar puntos en el plano es usual determinar un sistema de coordenadas: fijamos un punto (origen de coordenadas) por el que pasan dos rectas perpendiculares. Una indicará el eje x y la otra el eje y. Si además identificamos en ambas rectas cada número real con un punto, tenemos la caracterización de cualquier punto en el plano en términos de sus "proyecciones" a los ejes coordenados (Ver los puntos $P(1,1)$ y $Q(-2,3)$ en la Figura 1)

Como aplicación de esta identificación, podemos representar en el plano,por ejemplo, ecuaciones de la forma $y=f(x)$, donde $f(x)$ es una expresión matemática en x (o más general, $f(x,y)=0$).

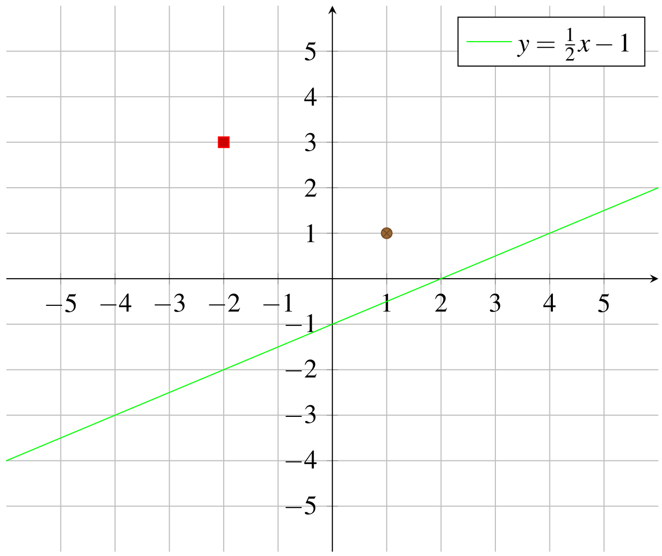

Figura 1: Ejes cartesianos en donde se dibujaron los puntos $P(1,1)$, $Q(-2,3)$ y la recta $y = \frac{1}{2}x - 1$

Sin ir más lejos, podemos identificar de esa forma a las ecuaciones lineales con las rectas: una ecuación lineal de la forma $ax + b = y$ se identifica con una **recta** en el plano cartesiano. Es decir: cada punto $P(x_0, y_0)$ de la recta en el plano satisface la ecuación (es decir, $ax_0 + b = y_0$) y viceversa: cada solución de la ecuación (x_1, y_1) se representa en el plano como un punto $Q(x_1, y_1)$ que está sobre la recta.

Ejercicio 9. Representar en los ejes coordenados anteriores los siguientes puntos (en forma aproximada): $P_1(0{,}5, -2)$, $P_2(-4{,}7, -5)$, $P_3(1,4)$. Trazar la recta que une los puntos P_1 y P_3. ¿Se animan a encontrar la ecuación que la representa? Ayuda: planteen un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejercicio 10. Elegir el sistema a. del Ejercicio 8, representar las ecuaciones lineales como rectas en el plano coordenado y encontrar gráficamente la solución al sistema.