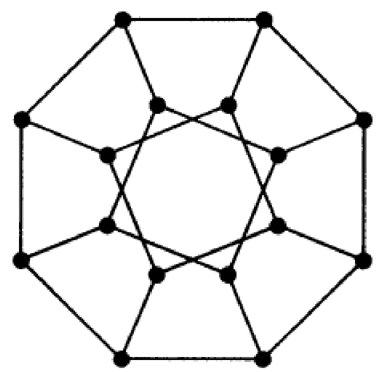
Teoría de Grafos 2023. Práctica 7. Ciclos Hamiltonianos.

1. Determinar si el siguiente grafo es hamiltoniano.



2. Hallar un grafo simple, con a lo sumo 6 vértices y al menos una arista, que verifique cada una de las siguientes condiciones: a) G es euleriano y hamiltoniano. b) G es euleriano, pero no hamiltoniano. c) G es hamiltoniano, pero no euleriano.

3. Para $n > 1$, probar que $K_{n,n}$ posee $\frac{(n-1)!n!}{2}$ ciclos hamiltonianos.

4. Un camino P de un grafo G se dice hamiltoniano si contiene a todos los vértices del grafo. Todo grafo con un ciclo hamiltoniano posee un camino hamiltoniano, pero no vale la recíproca (basta tomar un grafo camino como contraejemplo). Probar que un grafo G posee un camino hamiltoniano si y sólo si el grafo G' obtenido de G agregándole un vértice nuevo u y haciéndolo adyacente a todos los demás vértices posee un ciclo hamiltoniano.

5. Elena y Dora invitan a 10 amigos a cenar. En este grupo de doce, todos conocen a al menos seis personas. Demostrar que pueden sentarse los doce alrededor de una mesa circular de modo que todo comensal conozca a las dos personas que están sentadas a su lado.

6. Probar que para todo $n > 2$ existe un grafo simple conexo no hamiltoniano tal que todo vértice tiene grado al menos $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Vemos así que el grado mínimo se puede acercar mucho a $\frac{n}{2}$ sin que el grafo sea hamiltoniano.

7. Un ratón intenta comerse un cubo de 3x3x3 de queso. Empieza en una esquina y se come cada vez un cubo de 1x1x1 antes de pasar a uno adyacente (decimos que dos cubos son adyacentes cuando comparten cara) ¿Puede comerse el cubo central en último lugar?

8. Sea n un entero mayor o igual que 3. Probar que el máximo número posible de aristas de un grafo simple no hamiltoniano con n vértices es $\binom{n-1}{2} + 1$. (Sugerencia: probar por inducción que todo grafo que tenga más aristas es hamiltoniano)

9. Probar que todo torneo posee un camino dirigido hamiltoniano.