Teoría de Grafos 2023. Práctica 6. Árboles.

1. Hallar la cantidad total de árboles no isomorfos entre sí con 5 vértices ¿Cuántos hay de 6 vértices?

2. Probar que un grafo conexo G es un árbol si y sólo si toda arista de G es de corte.

3. Probar que todo árbol con grado máximo $a > 1$ tiene al menos a hojas.

4. Sea T un árbol tal que todo vértice adyacente a una hoja tiene grado al menos 3. Probar que T tiene un par de hojas con vecino común.

5. Dado un vértice v de un grafo G, la excentricidad de v está definida por $ecc(v) = max\{d(v, w) : \ w \in V(G)\}$. El centro de un grafo G es el subgrafo inducido por los vértices de mínima excentricidad en G. Demostrar que, para todo árbol, el centro consiste de un único vértice o de dos vértices adyacentes.

6. Elegir un árbol de 8 vértices, numerar sus vértices y hallar su código de Prüfer. Luego, invertir dicho código y hallar el árbol que posee tal código.

7. Determinar cuáles árboles tienen códigos de Prüfer que
   (a) contienen sólo un valor.
   (b) contienen exactamente 2 valores.
   (c) tienen distintos valores en todas las posiciones.

8. Sea G un grafo simple con cinco vértices, tales que cuatro de ellos inducen C_4 y el vértice restante es adyacente a todos los demás. Hallar la cantidad total de árboles generadores de este grafo.

9. Determinar si es verdadero o falso: si T es un árbol generador de peso mínimo de un grafo G y $u, v \in V(G)$, entonces el uv-camino en T es un uv-camino mínimo en G.

10. Sea G un grafo tal que sus aristas tienen peso y sea C un ciclo de G. Probar que, si e es una arista de C que tiene un peso mayor que cualquier otra del ciclo, entonces no existe un árbol generador de G de peso mínimo que tenga a la arista e.

11. Dado un grafo conexo G, sea H el grafo cuyos vértices son todos los árboles generadores de G, siendo dos árboles generadores distintos T y T' adyacentes si y sólo si existen aristas e y e' tales que $T' = T - e + e'$.

    - Probar que H es conexo.
    - Supongamos ahora que las aristas de G tienen pesos no negativos. Sea H' el subgrafo de H inducido por los árboles generadores de peso mínimo. Probar que H' es conexo también. (Sugerencia: considerar los argumentos de la demostración del algoritmo de Kruskal y/o el ejercicio anterior)
    - Demostrar que, si G posee dos árboles generadores de peso mínimo distintos, entonces los pesos de sus aristas y las multiplicidades de dichos pesos coinciden.

12. Determinar el menor costo de construcción de una red de agua de modo que cada una de las 5 ciudades sea accesible desde otra, sabiendo que el costo de construcción de una red entre cada par de ciudades está dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & \infty & 10 \\ 11 & 9 & \infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Hallar caminos de peso mínimo desde el vértice 1 a todos los demás. Considerar el grafo cuyos pesos están dados por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 11 & 9 \\ 3 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & \infty & 10 \\ 11 & 9 & \infty & 0 & 7 \\ 9 & 8 & 10 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Cuatro personas deben cruzar un cañón de noche a través de un puente frágil. Para cruzar, es esencial hacerlo con una linterna. El grupo dispone de una linterna solamente y la única forma de cruzar al otro lado es que sea portada

por alguien que esté cruzando. A lo sumo dos personas pueden estar en el puente juntas a la vez. Las cuatro personas requieren de 10, 5, 2 y 1 minutos respectivamente si cruzan solas. Cuando dos personas cruzan juntas, se mueven a la velocidad de la persona más lenta. En 18 minutos, una inundación repentina inundará el sector llevándose el puente ¿Tienen tiempo las cuatro personas para cruzar y salvar sus vidas? Dar una respuesta sin usar teoría de grafos, y luego describir cómo se podría hallar la respuesta usando teoría de grafos (Sugerencia: relacionar con el problema de hallar caminos mínimos).