

Teoría de Grafos 2023. Práctica 5. Grados y digrafos.

1. Determinar si es verdadero o falso, y justificar: si u y v son los únicos vértices de grado impar en un grafo, entonces G contiene un uv -camino.
2. Probar si las siguientes son secuencias de grados de un grafo simple. En caso afirmativo, construir un grafo con esos grados. Si no, dar una prueba de imposibilidad.
 - $(5,5,4,3,2,2,2,1)$
 - $(5,5,4,4,2,2,1,1)$
 - $(5,5,5,3,2,2,1,1)$
 - $(5,5,5,4,2,1,1,1)$
3. Se tiene una liga con dos divisiones de 13 equipos cada una. Determinar si es posible programar la temporada de manera que cada equipo juegue nueve partidos con equipos de su división y cuatro partidos con equipos de la otra división.
4. Probar que todo grafo simple con al menos dos vértices tiene dos vértices de igual grado ¿Vale lo mismo para grafos sin loops con aristas múltiples?
5. Sean d_1, \dots, d_n enteros tales que $d_1 \geq \dots \geq d_n \geq 0$. Probar que existe un grafo sin loops (se permiten aristas múltiples) con secuencia de grados d_1, \dots, d_n si y sólo si la suma de estos números es par y $d_1 \leq d_2 + \dots + d_n$.
6. Dos vértices de un digrafo x e y se dicen conectados si existe un camino dirigido de x a y y otro de y a x . Probar que la relación de conexión en un digrafo D es de equivalencia y que sus clases son las componentes fuertemente conexas de D .
7. Sea G un digrafo simple con n vértices y sin ciclos. Probar que existe un orden v_1, \dots, v_n de los vértices de G de modo que, para todo par de valores distintos i, j entre 1 y n , si $v_i v_j \in E(G)$ entonces $i \leq j$.
8. Probar que en todo digrafo existe una componente fuertemente conexas sin aristas que ingresen a ella y que existe una componente fuertemente conexas sin aristas que salgan de ella.

9. Probar que existe un torneo de n vértices con grado de salida igual al grado de llegada en cada vértice si y sólo si n es impar.
10. Determinar si es verdadero o falso y justificar: todo digrafo simple (permitiendo loops) con n vértices ($n > 1$) tiene dos vértices distintos con el mismo grado de salida o dos vértices distintos con el mismo grado de llegada ¿Cambia la respuesta si pensamos a los digrafos simples en el sentido más restrictivo de que los loops no están permitidos?