Teoría de Grafos 2023. Práctica 3. Grafos bipartitos.

1. Probar que un grafo bipartito tiene una única bipartición si y sólo si es conexo. Para ello, si se tiene una bipartición A, B, considerar a B, A como la misma bipartición.

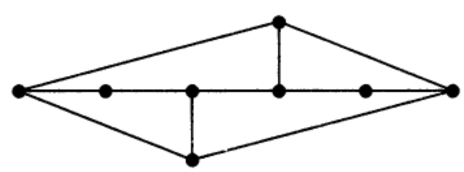
2. Sea A la familia de los grafos que son caminos, B la familia de los ciclos, C la familia de los grafos completos y D la familia de los grafos bipartitos. Hallar todas las clases de grafos isomorfos que están en la intersección de cada par de esas familias.

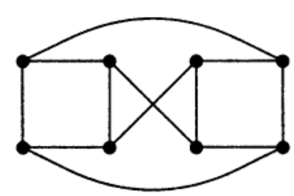
3. Determinar si el grafo de Petersen es bipartito y encontrar un conjunto independiente máximo en él.

4. Sea G el grafo cuyos vértices son las k-uplas de ceros y unos, con x adyacente a y si y sólo si difieren en una posición. Determinar si G es bipartito.

5. Sea G_n el grafo cuyos vértices son las permutaciones de $\{1, .., n\}$, siendo dos permutaciones $a_1, ..., a_n$ y $b_1, ..., b_n$ adyacentes si una puede obtenerse de la otra intercambiando la posición de dos elementos. Probar que G_n es bipartito. (Pista: para cada permutación a, contar los pares i, j tales que $i < j$ y $a_i > a_j$)

6. En cada uno de los grafos de abajo, encontrar un subgrafo bipartito con cantidad máxima de aristas. Justificar por qué no hay un subgrafo bipartito con mayor cantidad de aristas que él y determinar si hay algún otro subgrafo bipartito con la misma cantidad de aristas.





7. Probar que un grafo G es bipartito si y sólo si todo subgrafo H de G posee un conjunto independiente con al menos la mitad de los vértices que H tiene.

8. Sea G un grafo sin loops y con m aristas. Probar que G posee un subgrafo bipartito con al menos $\frac{m}{2}$ aristas.

9. Sea G un grafo simple y conexo que no tiene a P_4 ni a K_3 como subgrafos inducidos. Probar que G es un grafo bipartito completo.

10. **(a)** Dados n y k números naturales tales que $n \leq 2^k$, codificar los vértices de K_n con k-uplas y usar esto para construir k grafos bipartitos cuya unión es K_n.

    (b) Recíprocamente, si K_n es la unión de k grafos bipartitos $G_1, ..., G_k$, codificar convenientemente los vértices de K_n con k-uplas binarias y probar así que $n \leq 2^k$.

    Este procedimiento nos da una demostración alternativa del resultado que en la teoría hemos probado por inducción.