Teoría de Grafos 2022. Práctica 2. Grafos conexos.

1. Sean P y Q caminos de máxima longitud en un grafo conexo. Probar que P y Q tienen un vértice en común.

2. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso:

   (a) K_4 contiene un recorrido que no es una cadena.

   (b) K_4 contiene una cadena que no es cerrada y no es un camino.

   (c) K_4 contiene una cadena cerrada no trivial (con al menos una arista) que no es un ciclo.

3. Demostrar que, si todos los vértices de un grafo G simple y conexo tienen grado 2, entonces G es un ciclo.

4. Probar que el grafo de Petersen no tiene ciclos de longitud 7.

5. Probar que un grafo es conexo si y sólo si, para cada partición de sus vértices en dos conjuntos no vacíos, existe una arista con extremos en ambos conjuntos.

6. Sea G_n el grafo cuyos vértices son las permutaciones de $\{1, 2, ..., n\}$, con dos permutaciones adyacentes si y sólo si difieren en un intercambio de un par de elementos consecutivos. Probar que G_n es conexo.

7. Sea G el grafo simple con conjunto de vértices $\{1, 2, ..., 15\}$ tal que i y j son adyacentes si y sólo si su máximo común divisor es mayor que 1. Contar las componentes conexas de G y hallar un camino de longitud máxima en G.

8. Sea v un vértice de corte de un grafo simple G. Probar que $\bar{G} - v$ es conexo.

9. Sea G un grafo auto-complementario (es isomorfo a su complemento). Probar que G tiene un vértice de corte si y sólo si G tiene un vértice de grado 1.

10. Sea G un grafo simple sin vértices aislados y con ningún subgrafo inducido que posea exactamente dos aristas. Probar que G es completo.