ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2022

Práctica 3 - Diferenciación (primera parte)

A. Derivadas parciales

> Siempre que sea posible, utilizar reglas de derivación; reservar el cálculo de la derivada parcial por definición solamente para el caso en el que no se puedan aplicar las reglas.

1. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = xy\,\mathrm{sen}(y) + (3y-5x)^2$ (b) $g(x,y) = \dfrac{2\cos(x)}{e^y + x^2}$ (c) $h(x,y,z) = x^3\sqrt{y^2+z^2}$ (d) $k(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)\,dt$

   Indicar las condiciones que debe cumplir la función g del inciso (d) para que existan las derivadas parciales de $k(x,y)$.

2. Estudiar la existencia de las derivadas parciales de $g(x,y) = y^{2/3}x$ en todo su dominio.

3. Mostrar que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$ no es continua en $(0,0)$, existe $f_x(0,0)$ y no existe $f_y(0,0)$.

4. Mostrar que $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ no es continua en $(0,0)$ pero existen ambas derivadas parciales en ese punto.

5. Estudiar la existencia de las derivadas parciales de las siguientes funciones para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

   (a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y + y^3}$ (b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x(y-1)} & \text{si } x \neq 0,\ y \neq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

6. Calcular la matriz de las derivadas parciales de las siguientes funciones,

   (a) $f(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$ (b) $h(x,y,z) = \left(xy + \tan z, yx^2\right)$

B. Diferenciabilidad

> Siempre que sea posible, utilizar reglas de diferenciación; reservar el cálculo de la diferenciabilidad por definición solamente para el caso en el que no se puedan aplicar las reglas.

7. Sea $f(x,y) = \begin{cases} x^2\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

   (a) Calcular $f_x(x,y)$ para todo (x,y) en el dominio de f.
   (b) Mostrar que $f_x(x,y)$ no es continua en $(0,0)$ pero que f es diferenciable en $(0,0)$.
   (c) Encontrar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(0,0)$.

8. Mostrar que $g(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ tiene derivadas parciales continuas $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Es diferenciable en el origen? En caso afirmativo, hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de $g(x,y)$ en $(0,0)$.

9. Justificar por qué la gráfica de $f(x,y) = xy + \arctan(x+y)$ admite plano tangente en el origen y hallar la ecuación de dicho plano.

10. Sea $f(x,y)$ una función diferenciable en el punto $P_0=(2,1)$. Se sabe que $z=2x-3y+2$ es la ecuación del plano tangente de la función en P_0.

    (a) Hallar los valores de $f(2,1)$ y de $\nabla f(2,1)$. $\Big($Recordar que $\nabla f(2,1)=(f_x(2,1),f_y(2,1))\Big)$

    (b) Comprobar que $g(x,y)=3x-2f(x,y)+5$ es diferenciable en $(2,1)$.

    (c) Hallar la ecuación del plano tangente de $g(x,y)$ en el punto P_0.

11. Considerar la función del ejercicio A.4 y determinar si es o no diferenciable en $(0,0)$.

12. Dada $f\,(x,y)=\dfrac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4}$ definir $f\,(0,0)$ de modo que resulte continua en todo su dominio y estudiar su diferenciabilidad.

13. Sobre la función del Ejercicio 23 (Práctica 2 - Parte B):

$$g(x,y)=\begin{cases} \frac{yx^3-y^3}{x^2+y^2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

    (a) Calcular, si es que existen, las derivadas parciales $f_x(x_0,0)$ y $f_y(x_0,0)$, para todo x_0 real.

    (b) Comprobar que f es diferenciable en los puntos (x,y), con $y\neq 0$.

    (c) Analizar la diferenciabilidad de f en los puntos $(x_0,0)$. (Sugerencia: estudiar por separado los casos $x_0\neq 0$ y $x_0=0$)

    (d) En la práctica anterior probaron que la función f es continua en $(0,0)$. Hay alguna contradicción con el resultado hallado en el inciso anterior?

14. Demostrar que si $f\,(x,y)$ es una función diferenciable en $(0,0)$ entonces también lo es la función $g\,(x,y)=xf\,(x,y)+y^2f\,(x,y)$.

C. Derivadas de orden superior

15. Calcular las derivadas parciales segundas de $f\,(x,y,z)=z\ln(xy)$. Verificar la igualdad de las derivadas cruzadas correspondientes.

16. Sea $f\,(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Demostrar que $f_{xy}\,(0,0)\neq f_{yx}\,(0,0)$.

17. Dada $f\,(x,y)=\begin{cases}x^2\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$,

    (a) Calcular $f_x\,(x,y)$ y $f_y\,(x,y)$.

    (b) Mostrar que $f_{xy}\,(0,0)=0$ y $f_{yx}\,(0,0)=1$.

18. ¿Existe alguna función $f\in\mathcal{C}^2$ tal que $f_x\,(x,y)=x^2+y^2$ y $f_y\,(x,y)=-e^{x+y}$?

19. Verificar que la función $u\,(x,y)=e^x\cos y$ satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 y}=0$.
