ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2022

Práctica 2 - Ejercicios adicionales Continuidad

1. Dada la función $f(x,y) = \begin{cases} x(y-1)\ \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ y^2 - y & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

   (a) Analizar la continuidad de f en todo su dominio.

   (b) Encontrar una función $g(x,y)$ tal que la siguiente función sea continua en $\mathbb{R}^2$.

   $$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } x \neq 0 \\ g(x,y) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Justificar la respuesta (es decir, demostrar que la función $h(x,y)$ así definida es continua en los puntos de la forma $(0, y_0)$ para todo $y_0 \in \mathbb{R}$).

2. Sea $g(x,y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x-y} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2-y^2}\right)$.

   (a) Comprobar que g es continua en todo su dominio.

   (b) Para los puntos (a,b) tales que $a^2 = b^2$, analizar si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$. En caso afirmativo, demostrar el límite por definición.

   (c) En los casos en que sea posible, definir $g(a,b)$ para que la función resulte continua en dicho punto.

3. Sea la función

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy^2}{x-y} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2-y^2}\right) & \text{si } x^2 - y^2 \neq 0 \\ 2xy + 8 & \text{si } x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

   (a) Comprobar que f es continua en (a,b), si $a^2 - b^2 \neq 0$.

   (b) Para los puntos (a,b) tales que $a^2 - b^2 = 0$, analizar si existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$. En caso afirmativo, demostrar el límite por definición.

   (c) Analizar la continuidad de f en los puntos (a,b) en el caso en que $a^2 - b^2 = 0$.

4. Probar que la funcin $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$ no tiene lmite cuando $(x,y) \to (0,0)$.

   Para eso, en primer lugar calcular el dominio de f y mostrar que 0 es un candidato a lmite. Luego, demostrar la no existencia del lmite de dos formas distintas:

   - Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual f no tienda a 0. (Sugerencia: proponer $y = x + g(x)$, con una funcin g adecuada.)
   - Considerar la sucesin de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$. Probar que esta sucesin tiende a 0 y calcular el $\lim\limits_{n\to+\infty} f(p_n)$.

5. En cada uno de los siguientes casos determinar el conjunto del plano donde la función es continua.

   (a) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - y & \text{si } x \neq 2y \\ 3 & \text{si } x = 2y \end{cases}$

   Para los puntos ubicados en la frontera $x = 2y$ y en el caso en que existan, demostrar por definición los límites dobles correspondientes

   (b) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } 3x^2 + y^2 < 1 \\ 2x + y & \text{si } 3x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

   Para los puntos ubicados en la frontera $3x^2 + y^2 = 1$ y en el caso en que existan, demostrar por definición los límites dobles correspondientes

6. Determinar, si es posible, el valor de α para que la siguiente función resulte continua en todo el plano.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x(y+1)^2}{x^2 + (y+1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,-1) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,-1) \end{cases}$$