

**Práctica 2** - Funciones de varias variables. Límites. Continuidad  
Segunda parte

**B. Límites y continuidad de funciones de varias variables**

10. Para cada uno de los siguientes conjuntos, hallar los puntos de acumulación, la frontera, el interior y la clausura. Indicar si son cerrados, abiertos o ninguna de las dos cosas.

- (a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \frac{x^2}{4} + y^2 < 7\}$   
 (b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$   
 (c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (0, 1 - \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$   
 (d)  $D = B \cup C$   
 (e)  $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$   
 (f)  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 2\}$   
 (g)  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z \leq 2\}$

11. Demostrar que para todo  $x, y, u \in \mathbb{R}$  se satisfacen las siguientes desigualdades. Estas desigualdades son muy útiles y se podrán usar en los ejercicios siguientes.

$$(a) x^2 \leq x^2 + y^2 \quad (b) |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad (c) |xy| \leq x^2 + y^2 \quad (d) |x| \leq |x| + |y| \quad (e) |\operatorname{sen} u| \leq |u|$$

12. (a) Calcular los siguientes límites. Luego demostrarlos por definición

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\pi x^2)}{x} \qquad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 3x}{x - 1}$$

(b) Demostrar, por definición de límite, las siguientes igualdades:

$$\text{i. } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} 2x + y = 2 \qquad \text{ii. } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-8)} xy = -8$$

(c) Encontrar un  $\delta > 0$  adecuado tal que

$$\text{Si } 0 < \|(x, y) - (1, -8)\| < \delta, \text{ entonces } |xy + 8| < \epsilon,$$

para los casos  $\epsilon = 1$ ,  $\epsilon = 1/100$ .

(\*) Los ejercicios 13.\*, 14.\* y 15.\* pueden llegar a ser algo más difíciles para demostrar que los demás, pero sus resultados son muy útiles para ser utilizados en la resolución de otros límites. Lean los enunciados con atención.

13. \* Sea  $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  no se anula sobre  $D_r(a, b) - \{(a, b)\}$  y  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$ . Probar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x, y))}{f(x, y)} = 1.$$

**Una idea:** usar el límite conocido en una variable  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$  en su versión por definición.

14. \* Probar que si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , entonces  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} |f(x, y)| = |L|$ .

15. \* Probar que si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , entonces para cualquier  $\epsilon$  elegido, existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{si } 0 < \|(x, y) - (a, b)\| < \delta, \text{ entonces } |f(x, y)| < |L| + \epsilon.$$

**Observación útil:** Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ , la función está acotada en un entorno de  $(a, b)$ ; es decir existe  $M > 0$  tal que para cierto  $\delta > 0$  se cumple que  $|f(x, y)| < M$  para todo  $(x, y)$  del dominio con  $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ .

(basta con elegir  $\epsilon = 1/2$ , por ejemplo, y tomar  $M = |L| + 1/2$ ).

16. Considerar las funciones

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad h(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

- (a) Determinar el dominio de cada una de ellas.  
 (b) Estudiar la existencia del límite en el origen y, en caso de existir, determinar su valor.

17. Comprobar que los siguientes límites no existen,

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,5)} \frac{x^2 + 3(y-5)^2}{x^2 + (y-5)^2} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy \cos x}{x^2 + y^2} \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x \ln(y)}{x^2 + (\ln(y))^2} \quad (d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{3x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

18. Determinar si los siguientes límites existen. En caso afirmativo comprobarlo por definición. En las demostraciones se puede hacer uso de las desigualdades demostradas en el ejercicio 11 y los resultados de los ejercicios 13.\*, 14.\* y 15.\*.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{xy - y}{|x-1| + |y|} \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^x + ye^x}{x + 2y} \quad (d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + 7y^4) \operatorname{sen} \left( \frac{1}{xy} \right)$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3\sqrt{y}x^3}{x^4 + y^2} \quad (f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{xy + y - x} \quad (g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

19. Encontrar un valor posible  $L$  para los siguientes límites y luego demostrarlos. Pueden intentar hacerlo por definición o hacer uso de la propiedad de la compresión para acotar  $|f(x, y) - L|$  por una función que tienda a 0.

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln \left( \frac{4x^2 + 7y^2}{2x^2 + 5y^2} \right) \quad (b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\operatorname{sen}(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} \quad (c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{e^{xy} - 1}{x}$$

20. Consideremos las funciones del ejercicio 16.

- (a) Determinar el conjunto donde cada una ellas es continua.  
 (b) ¿Cuáles de estas funciones pueden redefinirse en el origen de manera que resulten continuas en ese punto?

21. En cada uno de los siguientes casos determinar el conjunto del plano donde la función es continua. En el caso de presentar discontinuidades evitables, redefinir la función para que resulte continua.

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (b) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x-3)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (3, 0); (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (3, 0) \text{ ó } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(c) h(x, y) = \begin{cases} 4x^2 + y^2 & \text{si } x \geq y/2 \\ 8 & \text{si } x < y/2 \end{cases} \quad (d) g(x, y) = \begin{cases} \frac{y\sqrt[3]{x}}{x + y^3} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$22. \text{ Estudiar la continuidad de } g(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left( \frac{x}{y} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ en } (0, 0).$$

23. Estudiar la continuidad de

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^3 - y^3}{x^2 + y^2} \operatorname{sen} \left( \frac{y}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

en todos los puntos de su dominio.