ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2022

Práctica 1 - Geometría analítica: vectores, rectas y planos, superficies en el espacio

Producto escalar y vectorial de vectores

Sean $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ dos vectores en $\mathbb{R}^n$, con $n = 2$ ó $n = 3$. Llamemos u_i, v_i a las componentes de cada uno de ellos. Enunciamos aquí las definiciones del producto escalar y vectorial de vectores, y algunas propiedades que serán demostradas en la teoría y/o en la misma Práctica.

Producto escalar (o producto punto): $\quad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$

Producto vectorial (o producto cruz): Para vectores en $\mathbb{R}^3$. El producto vectorial se define como el determinante

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades básicas: Sea α el ángulo determinado por los vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$.

- $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\| \cos\alpha$
- $\|\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}\| = \|\vec{\mathbf{u}}\| \, \|\vec{\mathbf{v}}\| \operatorname{sen}\alpha$

Observación: Los vectores de $\mathbb{R}^2$, $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ pueden pensarse como vectores en $\mathbb{R}^3$ agregando una tercera componente nula; es decir $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2, 0)$. Pensando de esa manera, se le puede dar un sentido al producto vectorial entre dos vectores del plano:

$$\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}} = (u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0)$$

Vectores

1. Dados $\vec{\mathbf{v}}_1 = 2\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = 2\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$ y hallar $\vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{\mathbf{v}}_2$.

2. Sean los vectores $\vec{\mathbf{u}} = (1, 2, 4)$ $\vec{\mathbf{v}} = (2, 3, -2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (-6, -9, 6)$.
   Calcular
   (a) $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$; $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$; $\vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$.
   (b) $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$; $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{w}}$; $\vec{\mathbf{w}} \times \vec{\mathbf{v}}$.

3. Sean $\vec{\mathbf{v}} = (0, -1, 2)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 2, 4)$ dos vectores de $\mathbb{R}^3$.
   (a) Obtener el coseno del ángulo entre $\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$ y entre $-\vec{\mathbf{v}}$ y $\vec{\mathbf{w}}$.
   (b) Obtener la componente de $\vec{\mathbf{v}}$ en la dirección de $\vec{\mathbf{w}}$ y su proyección vectorial.

4. Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores $(2, -2, -1)$ y $(0, 4, 3)$.

5. (a) Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores $(2, 1)$ y $(-1, 2)$.
   (b) Utilizando el producto vectorial entre vectores adecuados de $\mathbb{R}^3$, hallar el área del paralelogramo que tiene por vértices a los puntos $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 3)$, $P_3 = (0, 4)$ y $P_4 = (2, 5)$.
   Graficar los dos paralelogramos. Qué conclusión se obtiene?

6. Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{\mathbf{v}}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{\mathbf{v}}_2 = (0, 2, 0)$ y $\vec{\mathbf{v}}_3 = (2, 5, 5)$.

7. Demostrar que el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.

8. Demostrar que el producto vectorial de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.

9. Utilizando los dos ejercicios previos, estudiar si alguno de los pares de vectores del ejercicio 2 son ortogonales o linealmente dependientes.

10. (a) Encontrar 2 vectores de $\mathbb{R}^2$ de módulo 4 y perpendiculares al vector $\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}$.
    (b) Encontrar 4 vectores de $\mathbb{R}^3$ de módulo 4 y perpendiculares al vector $\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}}$.

Rectas y planos

11. Hallar la ecuación paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta en los siguientes casos:

    (a) Pasa por $\mathbf{P}_1 = (1, -2, 4)$ en la dirección de $\vec{\mathbf{v}} = (2, -2, -1)$.

    (b) Pasa por los puntos $\mathbf{P}_1 = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{P}_2 = (-2, 2, 1)$.

    (c) Pasa por el punto $\mathbf{P}_1 = (4, 0, 7)$ y es perpendicular al plano de ecuación $3x - 2y + 8z + 24 = 0$.

12. Obtener la ecuación del plano en los siguientes casos:

    (a) Pasa por los puntos $\mathbf{P}_1 = (3, 2, -1)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 1, -2)$ y $\mathbf{P}_3 = (2, -4, 0)$.

    (b) Pasa por el punto $\mathbf{P}_1 = (1, -5, 2)$ y es perpendicular al vector $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 1, -4)$.

    (c) Contiene a las rectas $\vec{\mathbf{r}}_1(t) = (1, 1, 0) + t(1, -1, 2)$ y $\vec{\mathbf{r}}_2(s) = (2, 0, 2) + s(-1, 1, 0)$.

    (d) Es paralelo al plano $4x - 2y + z - 1 = 0$ y contiene al punto $(2, 6, -1)$.

13. Verificar si los puntos $\mathbf{P}_1 = (1, 2, -3), \mathbf{P}_2 = (0, 5, -4)$ y $\mathbf{P}_3 = (6, 9, 0)$ se encuentran en el plano determinado por el vector normal $\vec{\mathbf{N}} = (1, 2, -3)$ y el punto $\mathbf{P} = (8, 7, 0)$.

14. Encontrar el/los valor/es de α para los cuales las rectas $L_1(t) = (1, 3, 2) + t(2, \alpha, 4)$ y $L_2(t) = (1, 3, 2) + t(2, 2, -2)$ son perpendiculares.

15. Hallar las coordenadas del punto de intersección del plano y la recta dados por

$$\begin{cases} 5x - y + 2z - 12 = 0 \\ \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-1}{7}. \end{cases}$$

16. Mostrar que las rectas

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

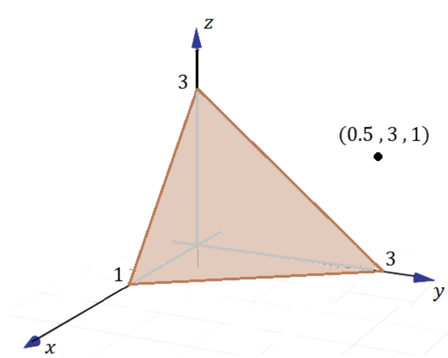
son paralelas y dar la ecuación del plano determinado por dichas rectas.

17. Sean a, b y c números reales no nulos. Demostrar que la ecuación del plano que intersecta a los ejes coordenados x, y y z en los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$, respectivamente, es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

18. Demostrar que la recta dada por $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+1}{4}$ está contenida en el plano $x - 2y + z = 6$.

19. Calcular la distancia del punto al plano según la figura.



20. Encontrar la distancia entre la recta del ejercicio 18 y el punto $(1, 2, -3)$.

21. Determinar si los planos determinados por las ecuaciones

$$2x - 3y + 5z = 7 \qquad \text{y} \qquad 8x + 7y + z = 3$$

son perpendiculares entre sí.

Superficies en el espacio

22. Trazar la gráfica de $x = 3$ y de $y = 6$ en $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

23. Dibujar el conjunto de puntos que cumplen simultáneamente $x = 3$, $y = 6$ en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

24. Encontar los valores de k para los cuales las siguientes intersecciones son no vacías.

$$\text{(a)} \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x = k \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z^2 \\ z = k \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x^2 + z^2 = y^2 + 1 \\ y = k \end{cases}$$

25. Describir las trazas de las siguientes superficies,

$$\text{(a) } z = x^2 + y^2 \qquad \text{(b) } x^2 + y^2 - z^2 = 1 \qquad \text{(c) } z = y^2 - x^2$$

26. Graficar el conjunto de puntos que satisface $x^2 + y^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.

27. En cada caso trazar la gráfica de las superficies cilíndricas,

$$\text{(a) } x^2 + z^2 = 4 \qquad \text{(b) } z = x^2 \qquad \text{(c) } y = 1 - x^2 \qquad \text{(d) } z = \operatorname{sen} y$$

28. En cada caso encontrar el radio de la circunferencia intersección entre las superficies,

$$\text{(a)} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ x = 2y^2 + 2z^2 \end{cases}$$

Ejercicios adicionales

Recordemos que se puede identificar un punto de $\mathbb{R}^n$ con el punto final de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ que tiene su punto inicial en el origen. En ese sentido, muchas veces escribiremos $\mathbf{A}$ para indicar, indistintamente, al vector $\vec{\mathbf{A}}$ o al punto final del mismo.

1. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$ un punto no nulo fijo. Dado un vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, demostrar que

   (a) Si $\mathbf{P}$ verifica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, entonces la trayectoria que describe $\mathbf{P}$ es una recta.

   (b) Si $\mathbf{P}$ verifica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$, entonces la trayectoria que describe $\mathbf{P}$ es una circunferencia.

   Graficar ambas situaciones.

2. Supongamos dos rectas en $\mathbb{R}^3$ que no se cortan. ¿Existe algún plano que los contenga? Dar ejemplos de diferentes situaciones.

3. Consideremos los planos $\pi_1 : 2x - y = z + 4$ y $\pi_2 : x + y + z - 2 = 0$.

   (a) Encontrar un vector normal al plano π_1 de módulo 1.

   (b) Es cierto que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares?

   (c) Encontrar un punto $\mathbf{A}$ que pertenezca a ambos planos.

   (d) Hallar una ecuación paramétrica de la recta r determinada por la intersección entre los dos planos.

   (e) Calcular la distancia entre el punto $\mathbf{B} = (1, 1, -3)$ y la recta r.

   (f) Calcular la distancia entre el punto $\mathbf{B}$ y el plano π_2.

   (g) Cuál es la distancia entre el punto $\mathbf{B}$ y el plano π_1? (si observan con cuidado, no hace falta hacer muchas cuentas...) ¿Qué explicación encuentran al resultado?