

Cónicas - Sus ecuaciones y gráficas

1. Encontrar la forma estándar de cada cónica (si es que existe) y graficar.

a) $2x^2 + y^2 - 6x = 0$

b) $2x + y^2 - 1 = 0$

c) $x^2 + 2x - y = 0$

d) $x(x + 1) - y^2 = 4$

e) $5 + x(x - 2) - y^2 = 0$

f) $x^2 + x + y^2 - 2y + 2 = 0$

2. Resolver cada inecuación en \mathbb{R}^2 y representar las soluciones en el plano. Reconozcan el tipo de curva involucrada en el borde de cada conjunto (recta, parábola, circunferencia, elipse, hipérbola).

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y < 1\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 2y^2 - 8 < 0\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$

d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \frac{x^2}{4} + y^2 < 9\}$

e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \frac{x^2}{4} + y^2 < 9\}$

f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y^2 \leq 1\}$. (Comparar con el inciso b) del ejercicio anterior)

g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \geq y^2 + 2\}$

h) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 5 + x(x - 2) - y^2 > 0\}$. (Comparar con el inciso e) del ejercicio anterior)

3. Dada la expresión $ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0$, encontrar las condiciones que deben cumplir los coeficientes para que represente:

a) una recta

b) una parábola (aclarar de qué eje)

c) una circunferencia

d) una elipse

e) una hipérbola (aclarar de qué eje)

Qué efecto se produce cuando $b \neq 0$ ó $d \neq 0$?. Den algunos ejemplos.

Operaciones básicas entre vectores: suma, producto por un escalar. Módulo de un vector.

Notación: Si $\vec{u} = (a, b, c)$ es un vector, su módulo es $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Repasar la operatoria de vectores y la noción de dependencia e independencia lineal en sus teorías de Álgebra

4. Sean los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, -2, 5)$ y $\vec{w} = (a, b, c)$.

a) Calcular

1) $\vec{u} + \vec{v}$

2) $2\vec{u} - \vec{v}$

3) $\|\vec{u}\|$; $\|\vec{v}\|$; $\|2\vec{u} - \vec{v}\|$.

4) Es verdad que $\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\| = \|\vec{u}_1\| + \|\vec{u}_2\|$ para cualquier par de vectores \vec{u}_1 y \vec{u}_2 ?

b) Encontrar los valores adecuados de a , b y c para que $\vec{u} + 3\vec{w} = (0, 0, 0)$

c) Es cierto que el vector $\vec{z} = (8, -2, 15)$ es una combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} ?

5. Sean los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (1, 1)$.

a) Calcular $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

b) Graficar el paralelogramo cuyos vértices son el origen y los puntos finales de los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{u} + \vec{v}$. Dónde ubicarían a $\vec{u} - \vec{v}$?

c) Relacionar las longitudes de los lados y las diagonales del paralelogramo con los módulos de \vec{u} , \vec{v} , $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.

6. Dado el vector $\vec{u} = (-3, 4)$, encontrar un vector con la misma dirección y sentido que sea unitario (es decir, de norma o módulo 1).

Práctica 1 - Geometría analítica: vectores, rectas y planos, superficies en el espacio

Producto escalar y vectorial de vectores

Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores en \mathbb{R}^n , con $n = 2$ ó $n = 3$. Llamemos u_i, v_i a las componentes de cada uno de ellos. Enunciamos aquí las definiciones del producto escalar y vectorial de vectores, y algunas propiedades que serán demostradas en la teoría y/o en la misma Práctica.

Producto escalar (o producto punto): $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i v_i$

Producto vectorial (o producto cruz): Para vectores en \mathbb{R}^3 . El producto vectorial se define como el determinante

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Propiedades básicas: Sea α el ángulo determinado por los vectores \vec{u} y \vec{v} .

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha$
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \alpha$

Observación: Los vectores de \mathbb{R}^2 , $\vec{u} = (u_1, u_2)$ pueden pensarse como vectores en \mathbb{R}^3 agregando una tercera componente nula; es decir $\vec{u} = (u_1, u_2, 0)$. Pensando de esa manera, se le puede dar un sentido al producto vectorial entre dos vectores del plano:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_1, u_2, 0) \times (v_1, v_2, 0)$$

Vectores

- Dados $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j}$ y hallar $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$.
- Sean los vectores $\vec{u} = (1, 2, 4)$, $\vec{v} = (2, 3, -2)$ y $\vec{w} = (-6, -9, 6)$.
Calcular
 - $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $\vec{u} \cdot \vec{w}$; $\vec{w} \cdot \vec{v}$.
 - $\vec{u} \times \vec{v}$; $\vec{u} \times \vec{w}$; $\vec{w} \times \vec{v}$.
- Sean $\vec{v} = (0, -1, 2)$ y $\vec{w} = (-1, 2, 4)$ dos vectores de \mathbb{R}^3 .
 - Obtener el coseno del ángulo entre \vec{v} y \vec{w} y entre $-\vec{v}$ y \vec{w} .
 - Obtener la componente de \vec{v} en la dirección de \vec{w} y su proyección vectorial.
- Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores $(2, -2, -1)$ y $(0, 4, 3)$.
 - Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores $(2, 1)$ y $(-1, 2)$.
 - Utilizando el producto vectorial entre vectores adecuados de \mathbb{R}^3 , hallar el área del paralelogramo que tiene por vértices a los puntos $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 3)$, $P_3 = (0, 4)$ y $P_4 = (2, 5)$.
Graficar los dos paralelogramos. Qué conclusión se obtiene?
- Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 2, 0)$ y $\vec{v}_3 = (2, 5, 5)$.
- Demostrar que el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares.
- Demostrar que el producto vectorial de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son linealmente dependientes.
- Utilizando los dos ejercicios previos, estudiar si alguno de los pares de vectores del ejercicio 2 son ortogonales o linealmente dependientes.
- Encontrar 2 vectores de \mathbb{R}^2 de módulo 4 y perpendiculares al vector $\vec{i} - 2\vec{j}$.
 - Encontrar 4 vectores de \mathbb{R}^3 de módulo 4 y perpendiculares al vector $\vec{i} - 2\vec{j}$.

Rectas y planos

11. Hallar la ecuación paramétrica y las ecuaciones simétricas de la recta en los siguientes casos:

- Pasa por $\mathbf{P}_1 = (1, -2, 4)$ en la dirección de $\vec{v} = (2, -2, -1)$.
- Pasa por los puntos $\mathbf{P}_1 = (1, 1, 0)$ y $\mathbf{P}_2 = (-2, 2, 1)$.
- Pasa por el punto $\mathbf{P}_1 = (4, 0, 7)$ y es perpendicular al plano de ecuación $3x - 2y + 8z + 24 = 0$.

12. Obtener la ecuación del plano en los siguientes casos:

- Pasa por los puntos $\mathbf{P}_1 = (3, 2, -1)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 1, -2)$ y $\mathbf{P}_3 = (2, -4, 0)$.
- Pasa por el punto $\mathbf{P}_1 = (1, -5, 2)$ y es perpendicular al vector $\vec{v} = (-1, 1, -4)$.
- Contiene a las rectas $\vec{r}_1(t) = (1, 1, 0) + t(1, -1, 2)$ y $\vec{r}_2(s) = (2, 0, 2) + s(-1, 1, 0)$.
- Es paralelo al plano $4x - 2y + z - 1 = 0$ y contiene al punto $(2, 6, -1)$.

13. Verificar si los puntos $\mathbf{P}_1 = (1, 2, -3)$, $\mathbf{P}_2 = (0, 5, -4)$ y $\mathbf{P}_3 = (6, 9, 0)$ se encuentran en el plano determinado por el vector normal $\vec{N} = (1, 2, -3)$ y el punto $\mathbf{P} = (8, 7, 0)$.

14. Encontrar el/los valor/es de α para los cuales las rectas $L_1(t) = (1, 3, 2) + t(2, \alpha, 4)$ y $L_2(t) = (1, 3, 2) + t(2, 2, -2)$ son perpendiculares.

15. Hallar las coordenadas del punto de intersección del plano y la recta dados por

$$\begin{cases} 5x - y + 2z - 12 = 0 \\ \frac{x-2}{4} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{7} \end{cases}$$

16. Mostrar que las rectas

$$\begin{cases} 3x - y - z = 0 \\ 8x - 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0 \\ 3x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$$

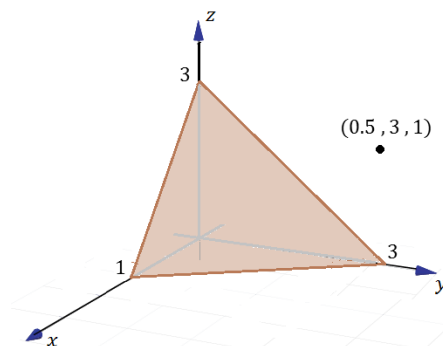
son paralelas y dar la ecuación del plano determinado por dichas rectas.

17. Sean a, b y c números reales no nulos. Demostrar que la ecuación del plano que interseca a los ejes coordenados x, y y z en los puntos $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ y $(0, 0, c)$, respectivamente, es

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

18. Demostrar que la recta dada por $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{4}$ está contenida en el plano $x - 2y + z = 6$.

19. Calcular la distancia del punto al plano según la figura.



20. Encontrar la distancia entre la recta del ejercicio 18 y el punto $(1, 2, -3)$.

21. Determinar si los planos determinados por las ecuaciones

$$2x - 3y + 5z = 7 \quad \text{y} \quad 8x + 7y + z = 3$$

son perpendiculares entre sí.

Superficies en el espacio

22. Trazar la gráfica de $x = 3$ y de $y = 6$ en \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

23. Dibujar el conjunto de puntos que cumplen simultáneamente $x = 3$, $y = 6$ en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 .

24. Encontrar los valores de k para los cuales las siguientes intersecciones son no vacías.

$$(a) \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1 \\ x = k \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = z^2 \\ z = k \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x^2 + z^2 = y^2 + 1 \\ y = k \end{cases}$$

25. Describir las trazas de las siguientes superficies,

$$(a) z = x^2 + y^2 \quad (b) x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (c) z = y^2 - x^2$$

26. Graficar el conjunto de puntos que satisface $x^2 + y^2 = 1$ en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 .

27. En cada caso trazar la gráfica de las superficies cilíndricas,

$$(a) x^2 + z^2 = 4 \quad (b) z = x^2 \quad (c) y = 1 - x^2 \quad (d) z = \operatorname{sen} y$$

28. En cada caso encontrar el radio de la circunferencia intersección entre las superficies,

$$(a) \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ x = 2y^2 + 2z^2 \end{cases}$$

Ejercicios adicionales

Recordemos que se puede identificar un punto de \mathbb{R}^n con el punto final de un vector \vec{v} que tiene su punto inicial en el origen. En ese sentido, muchas veces escribiremos \mathbf{A} para indicar, indistintamente, al vector $\vec{\mathbf{A}}$ o al punto final del mismo.

1. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^2$ un punto no nulo fijo. Dado un vector $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2$ cualquiera, demostrar que
 - (a) Si \mathbf{P} verifica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$, entonces la trayectoria que describe \mathbf{P} es una recta.
 - (b) Si \mathbf{P} verifica $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$, entonces la trayectoria que describe \mathbf{P} es una circunferencia.

Graficar ambas situaciones.

2. Supongamos dos rectas en \mathbb{R}^3 que no se cortan. Existe algún plano que los contenga? Dar ejemplos de diferentes situaciones.
3. Consideremos los planos $\pi_1 : 2x - y = z + 4$ y $\pi_2 : x + y + z - 2 = 0$.
 - (a) Encontrar un vector normal al plano π_1 de módulo 1.
 - (b) Es cierto que los planos π_1 y π_2 son perpendiculares?
 - (c) Encontrar un punto \mathbf{A} que pertenezca a ambos planos.
 - (d) Hallar una ecuación paramétrica de la recta r determinada por la intersección entre los dos planos.
 - (e) Calcular la distancia entre el punto $\mathbf{B} = (1, 1, -3)$ y la recta r .
 - (f) Calcular la distancia entre el punto \mathbf{B} y el plano π_2 .
 - (g)Cuál es la distancia entre el punto \mathbf{B} y el plano π_1 ? (si observan con cuidado, no hace falta hacer muchas cuentas...) Qué explicación encuentran al resultado?