ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2023

Práctica 10 - Integrales sobre superficies. Flujos

A. Superficies en el espacio

1. Identificar las siguientes superficies y encontrar un vector unitario normal a la superficie en los puntos en que exista.

   (a) $x = \cos u$, $y = \operatorname{sen} u$, $z = v$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$

   (b) $x = v \cos u$, $y = v \operatorname{sen} u$, $z = v$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 \leq v \leq 1$

   (c) $x = v \cos u$, $y = v \operatorname{sen} u$, $z = v^2$ con $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 < v \leq 1$

2. La siguiente es una parametrización del hiperboloide de una hoja,

$$\begin{cases} x = a \cos u \cosh v & -\pi < u \leq \pi \\ y = b \operatorname{sen} u \cosh v & v \in \mathbb{R} \\ z = c \operatorname{senh} v & a, b, c \in \mathbb{R} \text{ son constantes} \end{cases}$$

   (a) Encontrar una ecuación cartesiana que describa esta superficie.

   (b) Esbozar su gráfico.

3. Parametrizar las porciones de superficies indicadas.

   (a) La porción del primer octante de la esfera centrada en el origen de radio 3.

   (b) El triángulo de vértices $(0, 0, 3/2)$, $(0, 3/2, 0)$ y $(1, 0, 0)$.

   (c) La porción del plano $3x + 2y + 2z = 3$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   (d) La porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ interior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

   (e) La porción del cilindro $x^2 + y^2 = 5$ comprendido entre los planos $z = x$ y $z = x + 4$.

4. Dada una esfera de radio 2 con centro en el origen, hallar la ecuación para el plano tangente a la esfera en el punto $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$ considerando la parametrización dada por $\Phi(\theta, \phi) = (2 \cos\theta \operatorname{sen}\phi, 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$.

B. Integrales de superficie de funciones escalares

5. Calcular el área de la porción de superficie de la esfera unitaria contenida dentro de,

   (a) El cono $x^2 + y^2 = z^2$ para $z \geq 0$ (b) El cilindro $x^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}$

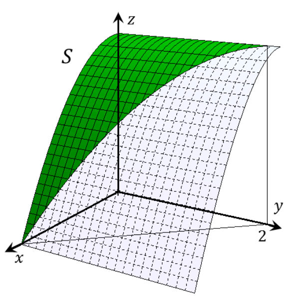
6. Evaluar en cada caso $\int_S f(x, y, z)\, dS$.

   (a) $f(x, y, z) = z$ y S es la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

   (b) $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ y S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ sobre el rectángulo $[0, 2] \times [-1, 3]$.

   (c) $f(x, y, z) = -xyz$ y S está formada por las cuatro caras del tetraedro delimitado por $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ y $x + y + z = 1$.

7. Una superficie S tiene la forma de una porción de cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ como se muestra en la figura. Calcular su masa considerando que la densidad en cada punto está dada por $\rho(x, y, z) = \dfrac{z + x^2}{\sqrt{4x^2 + 1}}$.



C. Integrales de superficie de campos vectoriales

8. Sea $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + xy\,\overrightarrow{\mathbf{j}} + (z+1)\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$. Calcular $\int_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{S}}$ en cada caso.

   (a) S es la superficie del ejercicio A.3c orientada con el normal hacia abajo.

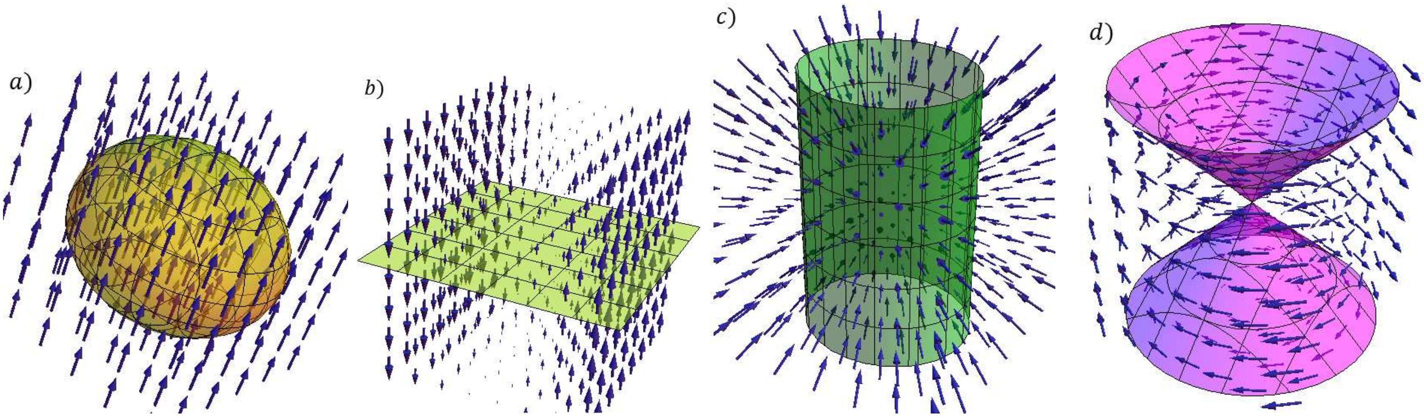
   (b) S es la superficie del ejercicio B.2b orientada con el normal exterior.

   (c) S es la porción del plano $x+y=1$ en el interior del cilindro $y^2+z^2=1$ orientada con el normal apuntando hacia el origen.

9. Sea S la superficie determinada por la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1$ con $z \geq 0$ y su base $x^2+y^2 \leq 1$ con $z=0$. Calcular el flujo saliente del campo $\overrightarrow{\mathbf{E}}(x,y,z) = (2x, 2y, 2)$ a través de S.

10. Sea $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = \sqrt{y}\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ (medido en metros por segundo) el campo de velocidades de un fluído. Calcular cuántos metros cúbicos de fluído atraviesan por segundo la superficie $x^2+z^2=y$ con $0 \leq y \leq 1$, en la dirección en que y crece.

11. Sin hacer cuentas indicar en cada caso si el flujo $\int_S \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{S}}$ es nulo o no.



12. Chequear las respuestas anteriores haciendo las cuentas según el siguiente detalle,

   (a) $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x,y,z) = \overrightarrow{\mathbf{j}} + 2\overrightarrow{\mathbf{k}}$ a través de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

   (b) $\overrightarrow{\mathbf{G}}(x,y,z) = y\,\overrightarrow{\mathbf{k}}$ a través del rectángulo $z=0, 1 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$.

   (c) $\overrightarrow{\mathbf{H}}(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ a través del cilindro $y^2+z^2=1$ con $-2 \leq x \leq 2$.

   (d) $\overrightarrow{\mathbf{L}}(x,y,z) = (y,-x,0)$ a través del cono $x^2+y^2=z^2$ con $-2 \leq z \leq 2$.

Ejercitación adicional

13. Hallar la ecuación cartesiana de las siguientes superficies y graficarlas.

   (a) $\Phi(u,v) = (u, v, v/2)$; en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y en $[0,2] \times [0,4]$

   (b) $\Phi(\theta,v) = (2\cos\theta, v, 2\operatorname{sen}\theta)$; en $[0,2\pi] \times [0,2]$ y en $[0,\pi/2] \times [0,4]$

   (c) $\Phi(\theta,v) = (v^2, v\cos\theta, v\operatorname{sen}\theta)$

14. Encontrar parametrizaciones cuyas imágenes sean las siguientes superficies. Indicar el dominio de parametrización.

   (a) el plano $x=y$;

   (b) la porción del plano anterior limitada por el cilindro $x^2+z^2=4$

   (c) el cilindro $y^2+4z^2=4$ que se encuentra en el primer octante limitado por $x=16-y^2-z^2$.

15. Para las parametrizaciones anteriores, indicar si son suaves y calcular el vector normal asociado en los puntos en los que existe.

16. (a) Calcular el área del cilindro $x^2+y^2=2y$ que se encuentra limitado por $z=0$ y el plano $y+z=2$.

   (b) Calcular el área del plano $y+z=2$ interior al cilindro $x^2+y^2=2y$.

17. Calcular el flujo del campo $\vec{B}(x,y,z) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}\breve{i} + \dfrac{x}{x^2+y^2}\breve{j}$ a través de las siguientes superficies:

(a) el cuadrado S que une los puntos $(1,0,0)$, $(3,0,0)$, $(1,0,2)$, y $(3,0,2)$ (con su interior), cuyo normal apunta al primer octante.

(b) la porción del plano $z=0$ encerrada por el paraboloide $z+4=(x-3)^2+2y^2$.

(c) cualquier superficie contenida en el plano $z=0$ que no contenga al origen de coordenadas.

18. Sea S la parte del cono $z^2=x^2+y^2$ con z entre -2 y -1 orientada con la normal apuntando hacia afuera del cono. Calcular $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ con $\vec{F}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$