ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2024

Práctica 9 Campos conservativos - Teorema de Green

A. Rotor y divergencia de campos vectoriales

1. Sean $\overrightarrow{\mathbf{F}}, \overrightarrow{\mathbf{G}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales de segundo orden continuas. Probar las siguientes identidades (las dos primeras son básicas y las usarán a menudo).

   (a) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$

   (b) $\operatorname{div}\left(\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{F}}\right) = 0$

   (c) $\nabla \times \left(f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}\right) = \nabla f \times \overrightarrow{\mathbf{F}} + f\left(\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{F}}\right)$

   (d) $\nabla \cdot \left(f\overrightarrow{\mathbf{F}}\right) = \nabla f \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}} + f\nabla \cdot \overrightarrow{\mathbf{F}}$

   (e) $\nabla \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{F}} \times \overrightarrow{\mathbf{G}}\right) = \left(\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{F}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathbf{G}} - \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot \left(\nabla \times \overrightarrow{\mathbf{G}}\right)$

   (f) $\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$

B. Campos conservativos

2. Mostrar que $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = y\cos(x)\,\vec{\mathbf{i}} + x\operatorname{sen}(y)\,\vec{\mathbf{j}}$ no es un campo vectorial gradiente.

3. Analizar en cada caso si es posible encontrar una familia de funciones potenciales. En caso afirmativo, hallarla.

   (a) $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (x^2 + y^2)\vec{\mathbf{i}} + 2xy\vec{\mathbf{j}}$

   (b) $\vec{\mathbf{G}}(x, y) = -xy\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}}$

4. Dado el campo $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = \left(2xy, x^2 + z^2, 2yz + z\right)$,

   (a) demostrar que es conservativo y calcular la familia de funciones potenciales.

   (b) Calcular $\int_A^B \overrightarrow{\mathbf{F}} \cdot d\overrightarrow{\mathbf{r}}$, donde $A = (1, 2, 3)$ y $B = (2, 8, 0)$.

5. Dado el campo $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (2xy, x^2)$,

   (a) demostrar que es conservativo y calcular la familia de funciones potenciales.

   (b) Calcular $\int_A^B \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$, donde $A = (1, 2)$ y $B = (2, 8)$.

6. Calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ en los siguientes casos,

   (a) $\overrightarrow{\mathbf{F}}(x, y, z) = \nabla\left(\sqrt{1 + x^2 + y^2 + 3z^2}\right)$ siendo C el segmento de $(2, 1, -1)$ a $(2, 2, 3)$.

   (b) $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (e^x \operatorname{sen}(y), e^x \cos(y))$ sobre el tramo de la parábola $y = x^2$ con $x \in [-1, 1]$.

7. ¿Es la integral $\int_C (2y + x)\,dx + (2x - 3y)\,dy$ independiente del camino? ¿Por qué?

8. Sean $\vec{\mathbf{s}}(x, y) = -y\vec{\mathbf{i}} + x\vec{\mathbf{j}}$ y $\vec{\mathbf{G}}(x, y) = \vec{\mathbf{s}}/\|\vec{\mathbf{s}}\|^2$.

   (a) ¿Cuál es el dominio donde $\vec{\mathbf{G}}$ es de clase C^1? ¿Es simplemente conexo?

   (b) Mostrar que el campo vectorial $\vec{\mathbf{G}}$ no es conservativo en todo su dominio. Para ello, calcular la integral del campo sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

   (c) Mostrar que $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ es una función potencial de $\vec{\mathbf{G}}$ en todo el plano salvo el eje y. ¿Hay alguna contradicción con el inciso anterior?

   (d) Buscar ahora una función potencial que esté definida en todo el plano salvo el eje x.

   (e) Utilizando adecuadamente los incisos anteriores, calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ en los siguientes casos:

      1. C es el tramo de parábola $x = 2 - y^2$ con $-1 \le y \le 1$.
      2. C es el tramo de parábola $y = x^2 + 1/4$ con $-1/2 \le x \le 1/2$.

9. Consideremos los puntos del plano $B = (-2, 0)$, $A = (-1, 1)$, $O = (0, 0)$, $D = (1, -1)$, $E = (2, 0)$ y $F = (1, 1)$. Llamemos XY al segmento orientado que une el punto X con el punto Y.

   Si es un campo conservativo en el plano y sabemos que $\int_{AOF} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 3$, $\int_{OF} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 2$ y $\int_{AB} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = -5$, calcular el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de los siguientes caminos:

   $$AODEF \qquad FEDO \qquad BOEF \qquad FAODEB \qquad FDOBAF$$

C. Teorema de Green

Si un ejercicio pide comprobar el Teorema de Green, deberán comprobar las hipótesis y calcular las dos integrales.

Si un ejercicio pide calcular una integral *usando el Teorema de Green*, se espera el cálculo de la otra integral involucrada en el Teorema.

Si no se especifica la manera, depende del integrando y de la región cuál integral es la que conviene calcular.

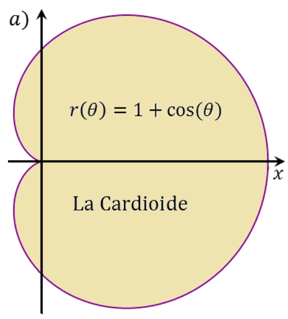
10. Utilizando el Teorema de Green, calcular $\oint_{C^+} Pdx + Qdy$ en los siguientes casos,

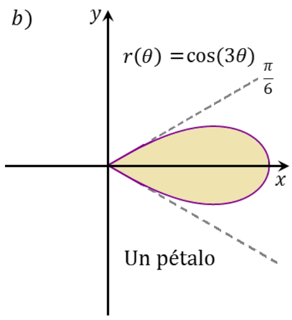
    (a) $P = x^2 - y^2$, $Q = 2xy$, $C = \partial R$, con $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\}$.

    (b) $P = x$, $Q = x + y^2$, $C = \partial R$, donde R es la región comprendida entre $x = 3$ y $3y^2 = 4x$.

    No olvidar verificar las hipótesis del Teorema.

11. Calcular el área encerrada por cada una de las siguientes curvas utilizando integrales de línea.





12. Sea C el borde de un rectángulo de altura h y base b. Mostrar que la integral $\oint_C (x^2y + 2x)\, dy + xy^2 dx$ no depende de la ubicación del rectángulo en el plano.

13. Sean C_1 y C_2 dos curvas cerradas simples que no se cortan entre sí, con C_1 en el interior de C_2. Llamemos Ω a la región encerrada por ellas.

    Sea D un abierto tal que $\bar{\Omega} \subset D$, y consideremos un campo $\vec{\mathbf{F}} = P\breve{\imath} + Q\breve{\jmath}$ de clase $C^1(D)$.

    Demostrar que el Teorema de Green es válido en Ω, es decir,

$$\iint_\Omega (Q_x - P_y)\, dx\, dy = \int_{C_2^+} P\, dx + Q\, dy - \int_{C_1^+} P\, dx + Q\, dy.$$

14. Sean $P(u, v) = vu^2$ y $Q(u, v) = -uv^2$. Comprobar el Teorema de Green sobre el anillo $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u^2 + v^2 \leq 4\}$ (es decir, comprobar las hipótesis y calcular las dos integrales).

15. Considerar el campo $\vec{\mathbf{G}}(x, y) = \left(\dfrac{-y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$ del ejercicio 7 de la Parte B.

    (a) Calcular $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

    (b) Considerar el disco unitario D. ¿Por qué no puede aplicarse el Teorema de Green en este caso?

    (c) En el Ejercicio 6 calcularon $\int_{\partial D} \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$. Consideren ahora una curva C simple cerrada contenida en D.

        1. ¿Cuánto vale $\int_C \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ si C no encierra al origen?
        2. ¿Cuánto vale $\int_C \vec{\mathbf{G}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ si C encierra al origen? (Sugerencia: considerar la región que tiene como frontera a C y a ∂D y aplicar el Teorema de Green).

16. Encontrar todas las circunferencias C para las cuales se satisface la siguiente igualdad $\oint_{C^+} 5ydx + 7xdy = 14\pi$.

17. Considerar $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = (3y + e^y \cos(x))\, \vec{\mathbf{i}} + (11x + e^y \operatorname{sen}(x))\, \vec{\mathbf{j}}$.

    (a) Calcular $\oint_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ siendo C la frontera del semicírculo $x^2 + y^2 \leq \dfrac{\pi^2}{4}$ con $y \geq 0$ recorrida en sentido antihorario.

    (b) Calcular $\int_{C'} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ siendo C' la semicircunferencia $x^2 + y^2 = \dfrac{\pi^2}{4}$ en el semiplano superior.

17. Calcular $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ para $\vec{\mathbf{F}} = (y, x^2 + y^2)$; C es el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido horario desde $(-2, 0)$ hasta $(0, 2)$ en ese orden.

18. Calcular

$$\int_\gamma \frac{-y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}},$$

donde γ es la porción de hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ que une $(1, 0)$ con $(\sqrt{2}, 1)$.

19. Sea γ la curva poligonal con vértices en los puntos $(2, 0), (1, 1), (-1, 1)$ y $(-2, 0)$.
Utilizando apropiadamente el Teorema de Green, calcular la siguiente integral de linea

$$\int_\gamma (x - y^2)dx + (3x + y)dy$$

20. Calcular el trabajo ejercido por la fuerza $\vec{\mathbf{F}}(x, y) = y\cos(xy)i + x\cos(xy)j$ al mover una partícula a lo largo de la curva dada por $y = \tan x$, con $x \in [0, \pi/4]$.

21. Sea C la porción de parábola $y = x^2$ que une $(2, 4)$ con $(0, 0)$ (en ese orden).
Calcular de dos maneras distintas $\int_C \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ en los casos siguientes:
   (a) $\vec{\mathbf{F}} = (2xy, x^2)$
   (b) $\vec{\mathbf{F}} = (xy, x^2)$

22. Dado el campo $\vec{\mathbf{F}}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + z^2}, e^y, 2z + \frac{z}{x^2 + z^2}\right)$,
   (a) Determinar si $\vec{\mathbf{F}}$ es conservativo (y en qué región). Justificar la respuesta. En caso afirmativo, hallar la familia de funciones potenciales.
   (b) Calcular la integral de línea de $\vec{\mathbf{F}}$ a lo largo de un tramo de hélice circular que va desde $(\frac{1}{2}, 0, \pi)$ hasta $(\frac{1}{2}, 0, 3\pi)$.
   (c) Sea γ la curva cerrada dada por $2x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$. Sin hacer cuentas, es posible afirmar que $\int_\gamma \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = 0$? Justificar la respuesta.