ANáLISIS MATEMáTICO II - Grupo Ciencias

2022

Práctica 7 - Integrales dobles y triples

A. Descripción de regiones

1. Graficar cada región para verificar si es de tipo I, tipo II, ambos o ninguno, y describirla.
   (a) el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,3)$ (con su interior).
   (b) el triángulo de vértices $(1,2)$, $(2,4)$ y $(5,1)$ (con su interior).
   (c) la región que determinan $x=y$ e $y=x^3$.
   (d) el círculo de radio 1 (centrado en el origen).
   (e) el anillo determinado por los círculos de radio 1 y $\sqrt{2}$ (centrados en el origen).

2. Recordemos el cambio de coordenadas polares: $x=r\cos\theta$, $y=r\text{sen}\theta$.
   Describir las regiones (d) y (e) del ejercicio anterior y las siguientes regiones mediante coordenadas polares.
   (a) el círculo de radio 2 (centrado en $(1,-1)$).
   (b) el sector determinado en el primer cuadrante por los círculos de radio 1 y $\sqrt{2}$ (centrados en el origen) y las rectas $y=x$ y $2y=x$.
   (c) la elipse $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$ (con su interior). En este caso conviene un cambio en polares adaptadas

3. (a) Describir en coordenadas polares las rectas $x=3$, $y=-1$ y $x+y=1$.
   (b) Describir como región de tipo I y luego en coordenadas polares la región limitada por las rectas $y=x$, $y=-x$ y $x=3$.
   (c) Describir como región de tipo II y luego en coordenadas polares la región a la derecha de la recta $x=3$ que se encuentra limitada por la circunferencia $x^2+y^2=18$.

B. Integrales dobles

4. Calcular las siguientes integrales y describir la región de integración.

$$\text{(a)} \int_0^1\int_0^{x^2} 2x\; dydx \qquad \text{(b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos y} x\text{sen}y\; dxdy \qquad \text{(c)} \int_{-1}^1\int_{-2|x|}^{|x|} y\; dydx$$

5. Calcular $\displaystyle\iint_R 4x-y\; dA$ donde R es el cuadrilátero de vértices $(1,2)$ $(1,6)$, $(2,1)$ y $(2,7)$.

6. Para calcular las siguientes integrales es necesario cambiar el orden de integración. Hacer un gráfico de la región de integración y luego cambiar la descripción de tipo I a tipo II o viceversa según corresponda,

$$\text{(a)} \int_0^1\int_y^1 2e^{x^2}\; dxdy \qquad \text{(b)} \int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{\text{sen}y}{y}\; dydx \quad \text{Cómo saben que esta integral existe?}$$

7. Recordemos el *Teorema del valor medio del cálculo integral: Sea f una función continua en una región D cerrada y acotada. Entonces existe algún punto $P_0\in D$ tal que* $\displaystyle\iint_D f(x,y)dA = \text{área}(D)f(P_0)$
   Considerar D como la región encerrada por las curvas $x=y$ y $x=y^2$.
   (a) Calcular el área de D.
   (b) Calcular el valor promedio de $f(x,y)=xy$ sobre D.
   (c) Encontrar algún punto $P\in D$ que verifique el Teorema del valor medio para integrales. Comprobar primero que puede utilizarse.

8. Calcular el volumen de los siguientes sólidos:

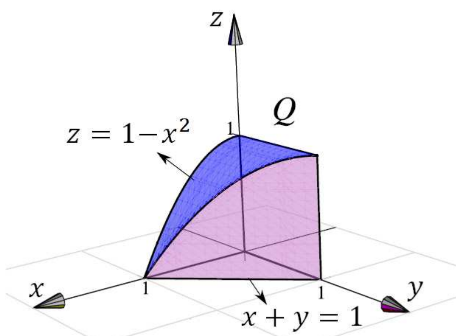
(a) El sólido debajo de la gráfica de $f(x,y) = x^2 + y^2$ sobre el rectángulo $[1,2] \times [1,3]$.

(b) El sólido formado por los puntos del primer octante debajo del plano $x + y + z = 3$ y por encima del plano $z = 1$.

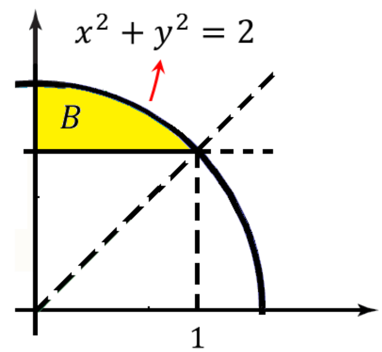
(c) El sólido Q de la Figura 1.

9. Sea D el disco unitario (centrado en el origen). Evaluar las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\, dA$ (b) $\displaystyle\iint_D \left(x^2 + y^2 - 1\right)^n \, dA$, $n \in \mathbb{N}$



(a) Figura 1



(b) Figura 2

10. Calcular $\displaystyle\iint_B f(x,y)\, dA$ en los siguientes casos.

(a) $f(x,y) = x$ y B la región interior a la circunferencia dada por $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 1$.

(b) $f(x,y) = 2x^2 + y^2$ y B la región determinada en el primer cuadrante por las elipses $2x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$.

(c) $f(x,y) = 6x$ y B es la región sombreada en la figura 2.

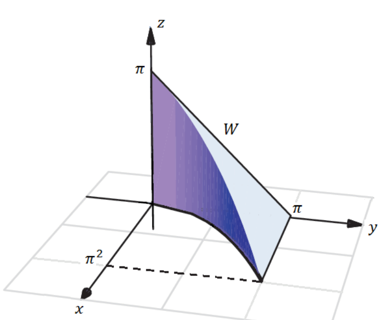
11. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies dadas por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ y $x + y + 2z = 4$.

12. Sea $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}$. Calcular $\displaystyle\iint_D (x+y)^{46}\, dA$.

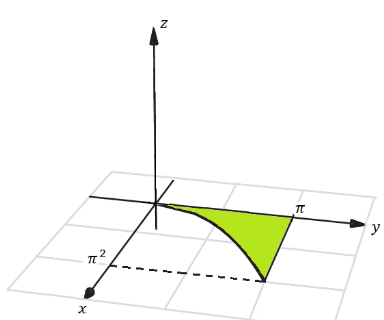
Sugerencia: puede convenir utilizar una transformación lineal donde una de las variables sea $x + y$.

C. Integrales triples

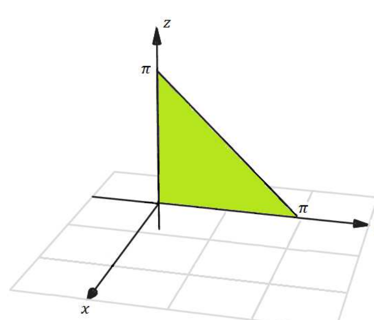
13. Sea W la región limitada por $y^2 = x$, $x = 0$, $y + z = \pi$ y $z = 0$. Calcular $\displaystyle\iiint_W x\, dV$ según las proyecciones indicadas.



(c) Sólido W



(d) Usando $dzdxdy$



(e) Usando $dxdydz$

14. Encontrar el volumen del sólido en cada caso,

(a) El sólido que se encuentra en el primer octante encerrado por las superficies dadas por $y = 2$ y $z = 9 - x^2$.

(b) El sólido comprendido entre los paraboloides determinados por $z = x^2 + y^2$ y $z = 8 - x^2 - y^2$.

(c) El sólido interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=1$, entre los conos dados por $x^2+z^2=y^2$ y $x^2+z^2=3y^2$.

(d) El sólido interior al cilindro y a la esfera como se muestra en la Figura 3.

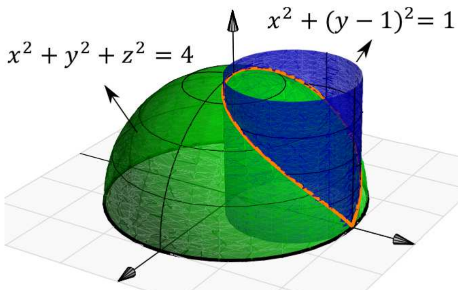
15. Recordemos que para un sólido V, se define *el centro de masa al punto* $(x_m, y_m, z_m) = \left(\dfrac{M_x}{m}, \dfrac{M_y}{m}, \dfrac{M_z}{m}\right)$, *siendo*

$m = \iiint_V \rho\, dV$ *la masa del sólido* ; ρ *la densidad del sólido*

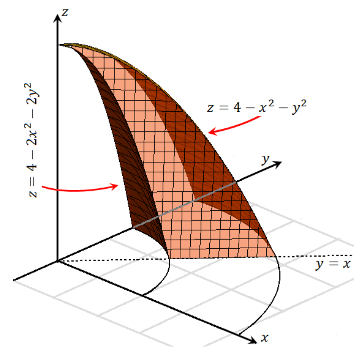
$M_x = \iiint_V \rho x\, dV;\quad M_y = \iiint_V \rho y\, dV;\quad M_z = \iiint_V \rho z\, dV.$

Calcular la tercera coordenada del centro de masa del sólido de la Figura 4 (suponer que la densidad es constante).

Observación: Si la densidad es constante, el centro de masa coincide con el centro geométrico



(f) Figura 3



(g) Figura 4

16. Calcular el volumen interior al cilindro $z=4-y^2$ que está comprendido entre los planos $y=x$ e $y=2x$ en el primer octante y por debajo de $z=3$.

17. Calcular el volumen determinado por los paraboloides $z=x^2+(y-1)^2$ y $z=\frac{5}{2}-x^2-y^2$, con $x\geq 0$.

ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2022

Ejercicios adicionales - Práctica 7

18. (a) Calcular el área de un círculo de radio a mediante una integral doble. Luego calcularla utilizando coordenadas polares.

    (b) Calcular el área de una elipse con semiejes $a, b > 0$ mediante un cambio de variables adecuado ("polares modificadas"). Luego plantear la integral doble que permite calcular la misma área. (cuál es la sustitución adecuada para poder completar el cálculo?)

    Qué conclusión sacan acerca del beneficio de los cambios en coordenadas polares?

19. (a) Calcular el volumen del sólido comprendido entre las superficies dadas por $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ y $z \leq 4$.

    (b) Calcular el volumen del sólido que se encuentra bajo la superficie dada por $z = 25 - x^2 - y^2$ con $z \geq 0$ y $x \geq 3$.

    (c) Calcular $\iint_R \frac{4}{(x^2 + 4y^2)^{3/2}} dA$, donde R es la región en el primer cuadrante que verifica $x + 2y \leq 4$ y $x^2 + 4y^2 \geq 4$.

20. Calcular $\iint_R \frac{1}{1 + y + 2x} dA$, donde R es el trapecio de vértices $(0, 0)$, $1, 0)$, $(0, 2)$ y $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$. (Sugerencia: una de las variables nuevas puede ser $v = y$).

21. Calcular $\iint_R \frac{y - 3x + 1}{y - \frac{1}{2}x + 1} dA$ donde R es la región comprendida entre las rectas $y = 3x + 1$, $y = 3x$, $2y = x$ e $y = \frac{1}{2}x + 4$.

22. Calcular $\iint_R y \operatorname{sen}(xy)\, dA$ donde R es la región comprendida entre las curvas dadas por $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$.

23. Calcular el volumen del sólido formado por los puntos interiores al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ que están situados sobre el plano $z = 0$ y bajo el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

24. Calcular la integral triple de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre el sólido formado por los puntos exteriores al cono $z^2 = x^2 + y^2$ e interiores al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

25. Calcular la integral triple de la función $f(x, y, z) = \mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ sobre la bola unitaria.

26. Determinar el volumen encerrado por la superficie cónica $x^2 + y^2 = z^2$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, con $a > 0$.

27. *Desafío*: Hallar el volumen del sólido encerrado entre los dos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$ (en el sistema de coordenadas que les resulte adecuado).