ANÁLISIS MATEMÁTICO II - Grupo Ciencias

2023

Práctica 4 - Diferenciación (segunda parte)

A. Derivadas direccionales - Vector gradiente

Comentarios generales

a) Recordemos que, dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, un punto P_0 interior de A y una dirección $\mathbf{u}$, la derivada direccional de f en P_0 en la dirección de $\mathbf{u}$ es

$$D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0 + t\mathbf{u}) - f(P_0)}{t}, \qquad \text{donde } \mathbf{u} \text{ es una dirección } \textbf{unitaria}$$

Si $|\mathbf{u}| \neq 1$, para el cálculo se debe considerar como dirección a $\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$.

b) Solamente en el caso en que f sea diferenciable en P_0 se cumple que $\quad D_{\mathbf{u}} f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u}$.

c) Se pueden utilizar todas las propiedades conocidas, previo verificar que se cumplen las hipótesis. Sólo usaremos la definición de derivada direccional cuando sea estrictamente necesario.

Ejercicitación

1. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y direcciones indicadas.

   (a) $f(x, y) = x^3 + 3y$ en cualquier (x, y) en la dirección dada por $\theta = \pi/3$.

   (b) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ en $(0, 0)$ y en las direcciones $\vec{\mathbf{u}} = (1, 0)$, $\vec{\mathbf{v}} = (0, -1)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (1, 1)$.

   (c) $f(x, y, z) = e^z \left(xy + z^2\right)$ en $(0, 1, 0)$ y en la dirección que va desde $(0, 2, 8)$ a $(1, 5, 7)$.

2. Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en $(0, 0)$. Consideremos los vectores $\vec{\mathbf{v}} = (3, 4)$ y $\vec{\mathbf{w}} = (-1, 0)$. Si se sabe que $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(0, 0) = 8/5$ y $D_{\vec{\mathbf{w}}} f(0, 0) = 2$ encontrar el vector $\nabla f(0, 0)$.

3. Considerar $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + (y-1)^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases}$.

   (a) Hallar $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(0, 1)$ siendo $\vec{\mathbf{u}}$ una dirección unitaria arbitraria. (Atención con el caso $\vec{\mathbf{u}} = (0, \pm 1)$)

   (b) Comprobar que para toda dirección unitaria $\vec{\mathbf{u}}$ se cumple que $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(0, 1) = \nabla f(0, 1) \cdot \vec{\mathbf{u}}$.

   (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 1)$?

4. Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin(y) + y^2 \sin(x)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

   (a) Calcular $D_{\vec{\mathbf{u}}} f(0, 0)$ para toda dirección unitaria $\vec{\mathbf{u}}$.

   (b) Buscar una dirección para la cual $D_{\vec{\mathbf{v}}} f(0, 0) \neq \nabla f(0, 0) \cdot \vec{\mathbf{v}}$.

   (c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

5. Sea $f(x, y)$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 2)$ es $2x + 3y + 4z = 1$. Calcular la derivada direccional de f en la dirección del vector $\vec{\mathbf{v}} = 2\,\vec{\mathbf{i}} + 4\,\vec{\mathbf{j}}$.

6. La función $T(x, y, z) = 10\left(xe^{-y^2} + ze^{-x^2}\right)$ indica la temperatura en cada punto de un depósito de agua. Al considerar el punto $P = (0, 0, 1)$ dentro del depósito,

(a) ¿Cuál es la razón de cambio instantánea de la temperatura al desplazarnos en la dirección del punto $Q = (2, 3, 1)$?

(b) ¿En qué dirección debemos desplazarnos para que la temperatura disminuya lo más rápido posible?

(c) Encontrar 3 direcciones en donde la derivada direccional tome el valor 1.

(d) ¿Cuál es el valor de la máxima razón de cambio instantánea posible?

(e) ¿Existe alguna dirección en donde la derivada direccional tome el valor 20?

7. Sea f una función diferenciable. Si $D_{\vec{\mathbf{u}}} f\,(1,2) = \sqrt{2}$ y $D_{\vec{\mathbf{v}}} f\,(1,2) = 4$ donde $\vec{\mathbf{u}} = (2,4)$ y $\vec{\mathbf{v}} = (1,3)$, hallar una dirección de crecimiento nulo de f a partir del punto $(1,2)$.

B. Regla de la cadena

Comentarios generales

a) Cada vez que utilicen la regla de la cadena comprueben las hipótesis que permiten utilizarla (diferenciablilidad de las funciones involucradas en los puntos correspondientes).
Recuerden que si una función f es C^1 (es decir, la función y sus derivadas parciales son continuas), entonces f es diferenciable. Si la estructura de las funciones involucradas en la composición son de clase C^1, éste es el modo más rápido de comprobar las hipótesis que permiten usar la regla de la cadena. Sólo en el caso en que alguna de las funciones no tuviera derivadas parciales continuas, habrá que comprobar la diferenciabilidad en el punto por definición.

b) Hay muchos ejercicios para practicar la regla de la cadena en esta parte. Pueden dejar algunos ejercicios como repaso para el parcial (por ejemplo algunas de las igualdades de los ejercicios 12 y 14).

c) Pueden utilizar la expresión "desarrollada" de la regla de la cadena o la notación matricial; pero es importante que sepan reconocer las dos expresiones.
Por ejemplo, supongamos:
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ de clase C^1;
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(u,v) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v))$ también de clase C^1
y consideremos la composición $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$h(x,y) = f(g(x,y)).$$

Puede utilizarse la regla de la cadena por ser composición de funciones diferenciables. Sea $P \in \mathbb{R}^2$ y $Q = g(P)$.
Llamemos $h = (h_1, h_2, h_3)$. Entonces para cada componente $h_i(x,y) = f_i(g(x,y))$,

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial h_i}{\partial x}(P) = & \dfrac{\partial f_i}{\partial u}(Q).\dfrac{\partial u}{\partial x}(P) + \dfrac{\partial f_i}{\partial v}(Q).\dfrac{\partial v}{\partial x}(P) \\ \\ \dfrac{\partial h_i}{\partial y}(P) = & \dfrac{\partial f_i}{\partial u}(Q).\dfrac{\partial u}{\partial y}(P) + \dfrac{\partial f_i}{\partial v}(Q).\dfrac{\partial v}{\partial y}(P) \end{array}\right. \quad \text{ó} \quad \left\{\begin{array}{ll} (h_i)_x(P) = & (f_i)_u(Q).u_x(P) + (f_i)_v(Q).v_x(P) \\ \\ (h_i)_y(P) = & (f_i)_u(Q).u_y(P) + (f_i)_v(Q).v_y(P) \end{array}\right.$$

(la notación que prefieran) ó, de modo matricial,

$$Dh(P)^{3\times 2} = Df(Q)^{3\times 2} \cdot Dg(P)^{2\times 2},$$

donde, por ejemplo, la matriz jacobiana $Dg(P)$ es

$$Dg(P) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}(P) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}(P)$$

Ejercicitación

8. Sea $f\,(x,y)$ una función con derivadas parciales continuas y positivas. Consideremos $g(t) = f\left(t, t^3\right)$. Analizar si g es una función creciente.

9. Sean $H(x,y) \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ y $x(t)$, $y(t)$ funciones con derivada continua. Consideremos $F(t) = H(x(t), y(t))$.
Si se verifica que
$$x'(t) = H_y(x(t), y(t)) \qquad y'(t) = -H_x(x(t), y(t)),$$
mostrar que $F(t)$ es constante.

10. Sean $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Consideremos $y(t,x)) = f(x - at) + g(x + at)$, con a constante. Mostrar que
$$a^2 y_{xx} = y_{tt}.$$

11. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y $f(x,y) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Mostrar que
$$\|\nabla f(x,y)\| = \left|g'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right|$$
para $(x,y) \neq (0,0)$.

12. Sea $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y el siguiente cambio (a coordenadas esféricas):
$x(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $\quad y(r,\theta,\phi) = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $\quad z(r,\theta,\phi) = r\cos\phi$, con $r > 0$.
Consideremos $g(r,\theta,\phi) = f(x(r,\theta,\phi), y(r,\theta,\phi), z(r,\theta,\phi))$.
Mostrar, usando la regla de la cadena sin armar la composición, que:
$$g_r(r,\theta,\phi) = 1; \qquad g_\theta(r,\theta,\phi) = g_\phi(r,\theta,\phi) = 0.$$

13. Sea $w(x,y) = f\left(x - y^2, y - x^2\right)$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función tal que
$$\nabla f(u,v) = 2uv\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + \left(u^2 - v^2\right)\overrightarrow{\mathbf{j}} \qquad \text{y} \qquad f(-14, 0) = 1.$$
Encontrar el valor adecuado de a de modo que el punto $(1, 3, a)$ pertenezca al plano tangente a la gráfica de la función w en $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

14. Sea $f(x,y) \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ y el siguiente cambio (a coordenadas polares): $x(r,\theta) = r\cos\theta$, $\quad y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta$, con $r > 0$.
Consideremos $g(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$
   (a) Mostrar que $\left[\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\right]^2 + \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right]^2 = \|\nabla f(x,y)\|^2$.
   (b) Mostrar que $g_{rr}(r,\theta) = f_{xx}(x,y)\cos^2\theta + 2f_{xy}(x,y)\sin\theta\cos\theta + f_{yy}(x,y)\sin^2\theta$.
   (c) Mostrar que $g_{\theta\theta}(r,\theta) = f_{xx}(x,y)\,y^2 - 2f_{xy}(x,y)\,xy + x^2 f_{yy}(x,y) - xf_x(x,y) - yf_y(x,y)$.

15. Sea $f(u,v) \in \mathcal{C}^2\left(\mathbb{R}^2\right)$ que satisface la ecuación de Laplace $f_{uu} + f_{vv} = 0$. Mostrar que las siguientes funciones también cumplen la misma ecuación.
$$\text{(a) } h(x,y) = f(ax + by, bx - ay) \qquad \text{(b) } d(x,y) = f\left(x^2 - y^2, 2xy\right)$$

16. Sean $f(x,y) = \left(x^2 + xy + 1, y^2 + 2\right)$ y $g(u,v) = (u + v, 2u, v)$. Usando la regla de la cadena, encontrar la matriz jacobiana de $(g \circ f)(1,1)$.

17. Sea $w = g(u,v)$ diferenciable en $(u_0, v_0) = (2, -5)$ tal que $\nabla g(2,-5) = (3,-1)$ y sea $H(x,y) = g\left(2x^2, 2y + x^2\right)$. Calcular
$$\nabla H(-1,-3).$$

1. Dada $w(x,y) = \mathrm{e}^{x-y} - z^2 y + x$, con $x = u - v$; $y = u + u^3 \ln(v-1)$; $z = uv$; hallar la dirección de máximo decrecimiento de la función $\tilde{w}(u,v) = w\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$ en $(1,2)$ y el valor de dicha derivada.

2. Demostrar que $z(x,y) = f(x/y)$ satisface la ecuación $xz_x + yz_y = 0$ para todo (x,y) con $y \neq 0$. Indicar qué hipótesis hay que hacer sobre la función f.

3. Sea la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}.$$

   a) Probar que f tiene derivadas en todas las direcciones en el punto $(0,1)$.

   b) Hallar todas las direcciones para las cuales $D_{\mathbf{u}} f(0,1) = 0$.

   c) Qué se puede decir sobre la diferenciabilidad de f en $(0,1)$?

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(1,2) = 5$.
   Sabiendo que su derivada direccional en $(1,2)$ es máxima en la dirección $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 3\sqrt{2}$,

   a) Hallar una ecuación para el plano tangente de la gráfica de f en el punto $(1,2,5)$.

   b) Calcular un valor aproximado de $f(1.01,\, 1.98)$ utilizando una aproximación lineal apropiada.

5. Sea $(x,y) = F(u,v))$ una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$ tal que
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad F(1,-2) = (1,2)$$
   Sea $h(x,y) = 2x^2 + y^3$ y consideremos la composición $g = h \circ F$.
   Hallar la ecuación de la recta normal a $z = g(u,v)$ en el punto $(1,-2,\, g(1,-2))$.

1. Este es un ejemplo que muestra que la regla de la cadena puede fallar si alguna de las funciones involucradas en una composición no es diferenciable.

   Consideremos las funciones $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ y $g(t) = (x(t), y(t)) = (at, bt)$,

   con a y b constantes arbitrarias.

   a) Mostrar que f no es diferenciable en $(0,0)$ pero que existe $\nabla f(0,0)$.

   b) Comprobar que g es diferenciable para todo t y que $Dg(t) = (a,b)$.

   c) Consideren la función compuesta $h(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t))$. Calcular $h'(0)$ (como el límite del cociente incremental).

   d) Comprobar que $f_x(0,0).x'(0) + f_y(0,0).y'(0) \neq h'(0)$.

   Conclusión!!

   Hay que verificar primero que las funciones son diferenciables antes de aplicar la regla de la cadena.

2. Sea f definida en $\mathbb{R}^n$ una función que admite $D_{\mathbf{u}}f(P_0)$ en un punto P_0 en la dirección $\mathbf{u}$.

   Se define $h(t) = f(P_0 + t\mathbf{u})$.

   a) Comprobar que $h'(0) = D_{\mathbf{u}}f(P_0)$.

   b) Si además f es diferenciable en P_0, hallar (por regla de la cadena) una expresión para $h'(0)$.

   Observación: Acaban de demostrar que cuando f es diferenciable en P_0, se puede calcular

   $$D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u}!!$$

3. Consideremos la función $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) = \frac{1}{n}\left(\cos(n\pi\sqrt{2}), \operatorname{sen}(n\pi\sqrt{2})\right) \\ x+y & \text{en caso contrario} \end{cases}$.

   a) Demostrar que f no es continua en $(0,0)$.

   b) Para cualquier dirección $\mathbf{u}$, comprobar que $D_{\mathbf{u}}f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \mathbf{u}$.

   Este es otro ejemplo de una función que verifica que $D_{\mathbf{u}}f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \mathbf{u}$ para toda dirección, y sin embargo no es diferenciable en P_0

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P_0 y supongamos que se conocen los valores de $D_{\mathbf{u}}f(P_0)$ y $D_{\mathbf{v}}f(P_0)$ en dos direcciones unitarias y linealmente independientes $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Â¿Cómo calcularían $D_{\mathbf{w}}f(P_0)$ en cualquier otra dirección unitaria $\mathbf{w}$?

5. Supongamos que $4x + 3y - 2z + 4 = 0$ es la ecuación del plano tangente de cierta función $f(x,y)$ en el punto $P_0 = (3,2)$.

   Indicar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas. Justificar cada respuesta.

   a) f es una función diferenciable en P_0.

   b) $\nabla f(P_0) = (4,3)$.

   c) Si llamamos $\vec{\mathbf{u}}$ a la dirección de máximo crecimiento, entonces $D_{\vec{\mathbf{u}}}f(3,2) = 5/2$.

d) $g(x,y) = \operatorname{sen}(f(x,y)) + x^2y$ es diferenciable en $P_1 = (1,2)$.

6. Consideremos la función $F(x,y,z) = \cos(x) + axy + b\ln(y+z) + z^2$, donde a y b son constantes reales.

   a) Hallar los valores de a y b para que la recta $r(t) = (-6t, -4t-1, 4t+2)$ sea normal a la superficie definida por $F(x,y,z) = 5$ en el punto $(0,-1,2)$.

   b) Para los valores hallados, determinar la derivada direccional de F en la dirección de máximo crecimiento en el punto $(\pi/2, 1, 0)$.